



Consorzio di bonifica
Dugali Naviglio Adda Serio

**PIANO COMPENSORIALE DI BONIFICA, DI IRRIGAZIONE
E DI TUTELA DEL TERRITORIO RURALE**

L.R. 5 dicembre 2008 n. 31, art. 88 - D.G.R. 2 ottobre 2015 n. X/4110



TAVOLA		TITOLO	
SCALA		APPENDICE B: TEORIA DEL BILANCIO IDROLOGICO	
DATA ELABORATO			
Marzo 2018			
GRUPPO DI LAVORO			
 <p>Via Ponchielli 5, 26100 Cremona (CR) tel. 0372 25315 www.dunas.it- info@dunas.it</p>		<p>ing. Paolo Micheletti geom. Paolo Antonioli ing. Stefano Antonioli ing. Chiara Bonapace dott. Chiara Francia ing. Stefano Valdameri</p>	
 <p>Percorsi Sostenibili Valutazioni ambientali territoriali e socio economiche Studio Associato PERCORSI SOSTENIBILI via Volterra, 9 20146 Milano (MI) www.percorsisostenibili.com</p>		<p>dott. Stefania Anghinelli pian.re terr.le Sara Lodrini</p>	
 <p>Tech Environment & Engineering i4 Consulting S.r.l. Via Barroccio dal Borgo, 1 35124 Padova (PD) tel. 049 7966665 - fax 049 685800 info@i4consulting.it - www.i4consulting.it</p>		<p>dott. Pietro Fanton ing. Alvisè Fiume ing. Mauro Tortorelli ing. Elisa Alessi Celegon ing. Elia De Marchi ing. Silvia Garbin ing. Gianluca Lazzaro</p>	
 <p>"DINO TONINI" υδωρ λογοσ Centro di Idrologia "DINO TONINI" Via Loredan, 20 35131 Padova tel. 0498275442 - fax 0498275446</p>		<p>UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA</p> <p>prof. ing. Paolo Salandin prof. ing. Gianluca Botter ing. Tommaso Settin</p>	
COMMESSA N.			
SO178/2016			
0	03/2018	Prima emissione	
REV. N°	DATA	MOTIVO DELLA REVISIONE	
			VERIFICATO APPROVATO



SOMMARIO

1	Il bilancio idrologico	3
1.1	Introduzione	3
1.2	Bilancio idrologico comprensoriale	3
1.2.1	Analisi spaziale dei dati: il Kriging	3
1.2.2	Il modello di infiltrazione	13
1.2.3	L'evapotraspirazione: il modello FAO	27



1 IL BILANCIO IDROLOGICO

1.1 Introduzione

La presente appendice tratta l'impostazione metodologica adottata nella definizione del bilancio idrologico comprensoriale. Il calcolo dei termini rilevanti al bilancio idrico comprensoriale ha richiesto l'utilizzo di informazioni territoriali, dati idrologici ed elementi modellistici classici dell'idrologia. Nel seguito di questa appendice vengono illustrati, con opportuni riferimenti bibliografici, gli schemi concettuali adottati, le impostazioni metodologiche sviluppate. Vengono inoltre riportati gli elementi caratteristici essenziali relativi a ciascuno strumento modellistico implementato.

1.2 Bilancio idrologico comprensoriale

Il bilancio idrico all'interno del comprensorio è stato svolto con riferimento ad un volume di controllo corrispondente allo strato di suolo superficiale, maggiormente interessato ai flussi idrologici coinvolti, e di estensione pari all'intero Consorzio di bonifica. Per questo volume di controllo sono stati computati i flussi in ingresso ed in uscita, la cui differenza deve essere compensata da una opportuna differenza (positiva o negativa) del termine di accumulo. Per il calcolo dei termini in ingresso all'equazione di bilancio è stato necessario calcolare il flusso di precipitazione medio al di sopra del territorio consortile, stimato sulla base delle misure puntuali di precipitazione attraverso un processo di interpolazione geostatistica (*Paragrafo 1.2.1*), ed applicare quindi un opportuno modello di infiltrazione per separare le componenti di scorrimento superficiale che non intervengono ad incrementare i termini di accumulo all'interno del suolo (*Paragrafo 1.2.2*). Per quanto riguarda i termini di flusso in uscita, invece, di particolare complessità risulta il termine di evapotraspirazione, il quale richiede sia la spazializzazione delle variabili meteorologiche rilevanti al calcolo del bilancio energetico, che l'applicazione di un modello in grado di stimare i flussi di vapore acqueo attraverso il suolo e per traspirazione delle colture, includendo l'effetto di componenti meteorologiche, componenti relative allo stato della vegetazione e componenti influenzate dallo stato di umidità del terreno (stress idrico), come descritto nel *Paragrafo 1.2.3*.

1.2.1 Analisi spaziale dei dati: il Kriging

La precipitazione e le altre variabili climatiche sono fenomeni che presentano una grande variabilità sia spaziale che temporale. Nei modelli idrologici è necessario descrivere con precisione i campi di pioggia e le forzanti meteorologiche a partire dalle misure puntuali registrate nelle stazioni meteorologiche sparse nel territorio. Il Kriging rappresenta un efficace mezzo di interpolazione statistica dei dati meteorologici misurati, essendo uno strumento di stima lineare ed ottimale (privo cioè di errore sistematico). Esso permette, a partire da una serie di dati osservati in diverse stazioni di misura, di calcolare il più probabile valore della variabile di interesse in un punto generico. Ripetendo il calcolo per i centri di ogni cella di una griglia regolare, è possibile determinare la distribuzione spaziale delle variabili meteorologiche misurate in corrispondenza di singole stazioni. Nel proseguo di questo capitolo si farà esplicito riferimento alla precipitazione, potendosi tuttavia generalizzare gli elementi descritti anche al caso più generale di interpolazione di variabili climatiche quali umidità, temperatura e velocità del vento.

Si assume quindi che la precipitazione al suolo $z(\bar{x})$ sia una funzione delle coordinate spaziali \bar{x} che costituisce la realizzazione di un campo aleatorio. Tale funzione non è nota in tutti i punti della regione ma deve essere ricostruita a partire dalle misure puntuali disponibili e da considerazioni legate alla natura del fenomeno fisico che è alla sua origine. Per questo motivo tale distribuzione viene considerata una funzione



aleatoria dello spazio indicata con $z(\bar{x})$ rispetto alla quale la distribuzione reale $Z(\bar{x})$ si immagina essere una delle infinite ed equiprobabili realizzazioni $Z(\bar{x})_1, Z(\bar{x})_2, \dots, Z(\bar{x})_k$. Per descrivere in maniera completa tale funzione aleatoria continua, si ricorre alla stima dei suoi momenti di primo e secondo ordine, che forniscono un'informazione sulle proprietà statistiche del campo aleatorio. Tali momenti sono:

- la media

$$\mu = E(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot d[F(z)] = \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot f(z) \cdot dz \quad \text{Eq. 1.1}$$

che rappresenta la media pesata, mediante la probabilità, di tutti i possibili eventi (ed E indica il valore atteso);

- la varianza

$$\sigma_z^2 = E[(z - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu)^2 \cdot d(F(z)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu)^2 \cdot f(z) \cdot dz \quad \text{Eq. 1.2}$$

che è la media pesata, mediante la probabilità, dei quadrati delle deviazioni della funzione rispetto al valore atteso;

- il variogramma

$$\begin{aligned} \gamma(\bar{x}, \bar{h}) &= 1/2 \sigma^2 [Z(\bar{x} + \bar{h}) - Z(\bar{x})] = & \text{Eq. 1.3} \\ &= 1/2 E \left\{ \left[Z(\bar{x} + \bar{h}) - Z(\bar{x}) \right] - E[Z(\bar{x} + \bar{h}) - Z(\bar{x})] \right\}^2 \end{aligned}$$

dove \bar{x} rappresenta il vettore coordinate di un punto generico dello spazio e $\bar{x} + \bar{h}$ il vettore coordinate di un punto che dista \bar{h} da \bar{x} ;

- l'autocovarianza

$$C(\bar{x}, \bar{h}) = E \{ [Z(\bar{x} + \bar{h}) - \mu] \cdot [Z(\bar{x}) - \mu] \}. \quad \text{Eq. 1.4}$$

Tra le ultime due grandezze, nell'ipotesi che sia definita la varianza del campo $\sigma^2(\bar{x})$, esiste una relazione, che può essere ricavata partendo dalla definizione di variogramma, sviluppandone il quadrato e sfruttando le proprietà di linearità dell'operatore valore atteso. La relazione si presenta nella forma:

$$2\gamma(\bar{x}, \bar{h}) = \sigma^2(\bar{x}, \bar{h}) + \sigma^2(\bar{x}) - 2C(\bar{x}, \bar{h}) \quad \text{Eq. 1.5}$$

Si definiscono due proprietà statistiche che possono caratterizzare i campi aleatori, in particolar modo i campi di pioggia:

- *omogeneità* (o *stazionarietà*), con cui si intende la possibilità di estendere a tutto il campo $z(\bar{x})$ le proprietà statistiche che si ottengono dalle misure a disposizione. In un campo stazionario quindi le proprietà statistiche non variano nello spazio;
- *ergodicità*, ovvero la proprietà per cui le realizzazioni (osservazioni) disponibili sono rappresentative dell'intera popolazione in esame, cioè possiedono le stesse proprietà statistiche dell'insieme di tutte le possibili realizzazioni. In altri termini, dato un processo stocastico, indicata con $m(x)$ la media calcolata su una singola realizzazione di N elementi, il processo si dice ergodico nella media se, al tendere di N all'infinito, $m(x)$ tende allo stesso valore $\mu(x)$ qualunque sia la realizzazione considerata.



In particolare, la stazionarietà del secondo ordine sotto le condizioni di ergodicità si traduce nelle seguenti proprietà:

$$E[z(\bar{x})] = \mu$$

$$C(\bar{x}, \bar{h}) = C(\bar{h})$$

$$\gamma(\bar{x}, \bar{h}) = \gamma(\bar{h})$$

Si noti come, nel caso di campo omogeneo, l'Eq. 12.5 si possa scrivere come:

$$\gamma(\bar{h}) = \sigma^2(z) - C_z(h) \quad \text{Eq. 1.6}$$

Al tendere di h ad infinito, la covarianza tende ad annullarsi e quindi il variogramma tende alla varianza; mentre al tendere di h a 0, anche il variogramma tende a 0. Questo significa che, il valore assunto dalla variabile aleatoria in un punto dello spazio si avvicina maggiormente al valore assunto in un altro punto, quanto minore è la distanza che separa i due punti. Quindi il variogramma fornisce una misura del grado di correlazione del campo: meno il campo è correlato e più rapidamente il variogramma si avvicina al suo valore massimo, cioè alla varianza. Nel caso del campo delle precipitazioni è possibile approssimare l'andamento del variogramma al crescere della distanza, tramite la seguente legge di natura esponenziale, come si vedrà nei paragrafi successivi:

$$\gamma_h(r) = \sigma_h^2 [1 - e^{-Z}] \quad Z = \sqrt{\left(\frac{r_x}{I}\right)^2 + \left(\frac{r_y}{I}\right)^2} \quad \text{Eq. 1.7}$$

dove r_x e r_y rappresentano le componenti secondo gli assi coordinati della distanza fra i due punti rispetto ai quali il variogramma è calcolato, $\sigma^2(h)$ è la varianza della variabile aleatoria h , e I è una grandezza chiamata *scala integrale* di h e rappresenta la distanza alla quale il campo aleatorio cessa di essere correlato.

Questo modo di operare implica a priori un'ipotesi di stazionarietà nello spazio e nel tempo delle caratteristiche delle precipitazioni e dei parametri meteorologici. La stima dei parametri del modello, $\sigma^2(h)$ e I , è stata ottenuta mediante il metodo dei minimi quadrati. Nell'ipotesi di stazionarietà del campo di pioggia/parametro meteo la macroscale I dipende solamente dalla distanza r_i tra i due punti rispetto ai quali il variogramma è calcolato; indicando con $\gamma_i(r_i)$ la serie dei variogrammi sperimentali l'equazione precedente si può scrivere nel modo seguente:

$$\gamma_i(r_i) = \sigma^2 [1 - e^{-r_i/I}] \quad \text{Eq. 1.8}$$

dove, per non appesantire la notazione, si è ommesso il pedice h . Si tratta di determinare i valori dei parametri che meglio approssimano la serie sperimentale ovvero di determinare i valori dei parametri che rendono minimo l'errore quadratico Φ definito come:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n [\gamma_i(r_i) - \sigma^2 [1 - e^{-r_i/I}]]^2 \quad \text{Eq. 1.9}$$

dove n è il numero di dati sperimentali. Imponendo la condizione di minimo:



$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial I} = 0 \quad \text{Eq. 1.10}$$

si ottiene il seguente sistema:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i(r_i)(1 - e^{-r_i I})}{\sum_{i=1}^n (1 - e^{-r_i I})^2} \quad \text{Eq. 1.11}$$

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i(r_i) r_i e^{-r_i I} - \sigma^2 \sum_{i=1}^n (r_i) e^{-r_i I} (1 - e^{-r_i I}) = 0$$

Risolvendo la seconda equazione per tentativi (e.g. mediante il metodo della bisezione), si ricava il valore della scala integrale I , che, sostituito nella prima, permette di determinare σ^2 .

1.2.1.1 Il kriging nel campo omogeneo

Si consideri una variabile aleatoria $z(x,y)$ appartenente ad un campo omogeneo, di cui sia noto il valore misurato in alcuni punti di un determinato dominio, e si voglia stimare z in un generico punto di coordinate (x_0, y_0) . Una stima ottimale di $\hat{z}(x_0, y_0)$ è definita dalle condizioni: i. assenza di errore sistematico (i.e. errore medio nullo) e ii. varianza dell'errore minima:

$$E(\hat{z}_0 - z_0) = 0$$

$$\text{var}(\hat{z}_0 - z_0) = \min \quad \text{Eq. 1.12}$$

Se $z_i(x_i, y_i)$ sono i valori di z misurati in n punti dello spazio, una stima ottimale

$\hat{z}(x_0, y_0)$ è data dalla combinazione lineare delle osservazioni $z_i(x_i, y_i)$:

$$\hat{z} = \sum \lambda_{i0} \cdot z_i \quad \text{Eq. 1.13}$$

Sostituendo nella precedente e sfruttando la linearità dell'operatore valor atteso, è possibile verificare la prima condizione per la stima ottimale:

$$E[\hat{z}_0 - z_0] = E[\sum \lambda_{i0} z_i - z_0] = \mu - \mu = 0 \quad \text{Eq. 1.14}$$

La seconda condizione, introducendo la definizione di varianza e sfruttando la relazione appena ricavata, diventa

$$\text{var}(\hat{z}_0 - z_0) = E[(\hat{z}_0 - z_0) - E(\hat{z}_0 - z_0)]^2 = E[(\hat{z}_0 - z_0)]^2 = \min \quad \text{Eq. 1.15}$$

A questo punto, al fine di semplificare la trattazione, è possibile trasformare il campo originario in un campo a media nulla, introducendo la variabile $Y(x, y)$: $[Y(x, y) = z(x, y) - \mu]$, in modo da ridurre il problema ad una stima lineare:



$$\hat{Y}_0 = \sum \lambda_i \cdot Y_i \quad \text{Eq. 1.16}$$

Sostituendo quest'ultima nella precedente:

$$\text{var}(\hat{z}_0 - z_0) = \text{var}(\hat{Y}_0 - Y_0) = E[(\hat{Y}_0 - Y_0)^2] \quad \text{Eq. 1.17}$$

Sviluppando il quadrato e sfruttando la proprietà di linearità del valore atteso, si ottiene:

$$E[(\hat{Y}_0 - Y_0)^2] = \sum_i \sum_j \lambda_{0i} \lambda_{0j} E[Y_i Y_j] + \sigma_Y^2 - 2 \sum_i \lambda_{0i} E[Y_0 Y_i] \quad \text{Eq. 1.18}$$

dove $E[(Y_i Y_k)]$ rappresenta l'autocovarianza della variabile aleatoria $Y(x, y)$, valutata nei punti (x_i, y_i) e (x_k, y_k) :

$$E[(Y_i Y_k)] = C[(x_i, y_i) - (x_k, y_k)] = C(\bar{r}_{ik}) \quad \text{Eq. 1.19}$$

avendo posto $\sum \lambda_{0i} C(\bar{r}_{ik}) = C(\bar{r}_{0k})$ e $\bar{r}_{ik} = (x_i - x_k)$, $\bar{r}_{0k} = (x_0 - x_k)$.

Sostituendo si ottiene l'espressione finale per la funzione obiettivo:

$$\text{var}(\hat{Y}_0 - Y_0) = \sum_i \sum_j \lambda_{0i} \lambda_{0j} C(\bar{r}_{ij}) + \sigma_Y^2 - 2 \sum_i \lambda_{0i} C(\bar{r}_{0i}) \quad \text{Eq. 1.20}$$

Si tratta ora di determinare i valori dei parametri λ che minimizzano tale funzione:

$$\frac{\partial[\text{var}(\hat{Y}_0 - Y_0)]}{\partial \lambda_{k0}} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \text{Eq. 1.21}$$

La soluzione è data dal seguente sistema lineare, scritto in forma matriciale:

$$\tilde{C} \bar{\lambda} = \bar{C}_0 \quad \text{Eq. 1.22}$$

da cui si possono ricavare i valori dei parametri $\bar{\lambda} = \tilde{C}^{-1} \cdot \bar{C}_0$, dove:

- \tilde{C} è la matrice delle covarianze, in cui il generico elemento \tilde{C}_{ij} rappresenta l'autocovarianza della variabile aleatoria fra punti che distano tra loro r_{ij} , cioè $C(\bar{r}_{ij})$:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & \dots & \dots & C_{nn} \end{bmatrix},$$



- \bar{C}_0 è il vettore il cui generico elemento C_{0i} rappresenta l'autocovarianza della variabile aleatoria valutata nel punto (x_0, y_0) per tutte le n osservazioni.

Risolvendo il sistema lineare si determinano quindi i pesi λ_{0i} che inseriti nell' Eq.

1.13 permettono il calcolo di \hat{z}_0 . In corrispondenza della soluzione del sistema lineare la funzione obiettivo presenta un minimo:

$$\sum \lambda_{0i} C(\bar{r}_{ik}) = C(\bar{r}_{0k})$$

Quindi:

$$[var(\hat{Y}_0 - Y_0)]_{MIN} = \sigma_Y^2 - \sum \lambda_i C(\bar{r}_{0i}) \quad \text{Eq. 1.23}$$

da cui si deduce infine che la varianza dell'errore è più piccola della varianza della variabile di interesse. Quanto più il campo è correlato, tanto più grande è $C(\bar{r}_{0i})$ e tanto più piccolo è l'errore che viene commesso nella stima.

1.2.1.2 Il kriging nel campo non omogeneo

Si consideri un dominio nello spazio, per semplicità quadrato, di lato L in cui sia possibile definire le grandezze

$$m_z = \frac{1}{L^2} \int_{L \times L} z(\bar{x}) d\bar{x} \quad \text{Eq. 1.24}$$

$$s^2(z) = \frac{1}{L^2} \int_{L \times L} [z(\bar{x}) - m_z]^2 d\bar{x} \quad \text{Eq. 1.25}$$

mentre, in generale, al tendere di L ad infinito m_z tende alla media, non in tutti i campi di variabili aleatorie, al tendere di L ad infinito, la $s^2(z)$ tende asintoticamente ad un valore finito pari alla varianza. In alcuni casi, infatti, intervengono delle eterogeneità tali per cui la $s^2(z)$ tende ad infinito. Questo implica la non esistenza della varianza. Per lavorare in campi non omogenei si presenta quindi la necessità di utilizzare uno strumento più generale (i.e. l'autocovarianza). Al fine di poter applicare ugualmente le tecniche di kriging per interpolare i dati osservati, si introduce l'*ipotesi intrinseca*, assumendo che il campo degli incrementi sia omogeneo:

$$\begin{aligned} E[z(\bar{x} + \bar{h}) - z(\bar{x})] &= \mu_\Delta(\bar{h}) \\ var[z(\bar{x} + \bar{h}) - z(\bar{x})] &= 2\gamma(\bar{x}, \bar{h}) = 2\gamma(\bar{h}) \end{aligned} \quad \text{Eq. 1.26}$$

La funzione variogramma, γ , generalizza la funzione di varianza: essa infatti esiste anche quando la varianza non esiste. La formulazione di kriging risulta essere analoga a quella del caso omogeneo:

$$E(\hat{z}_0) = \mu \quad \text{Eq. 1.27}$$

$$var(\hat{z}_0 - z_0) = \min$$

Sviluppando la prima equazione, si ottiene



$$E\left(\sum_i^n \lambda_{i0} z_i\right) = \sum_i^n \lambda_{i0} E(z_i) = \mu \sum_i^n \lambda_{i0} \quad \text{Eq. 1.28}$$

da cui

$$\sum_i^n \lambda_{i0} = 1 \quad \text{Eq. 1.29}$$

In questo modo si ottiene un vincolo in più rispetto al caso stazionario, che potrà essere usato per la determinazione della soluzione. Dalla seconda delle Eq. 1.27, si ottiene

$$E\left[\sum_i^n (\lambda_{i0} z_i - z_0)^2\right] = \min \quad \text{Eq. 1.30}$$

Il variogramma fornisce informazioni sulla correlazione dei diversi valori del campo. Nell'ipotesi in cui la varianza, σ_z^2 , esista, si può valutare la relazione tra covarianza e variogramma:

$$\gamma(\bar{r}) = \frac{1}{2} E[z^2(\bar{x} + \bar{r}) + z^2(\bar{x}) - 2z(\bar{x} + \bar{r})z(\bar{x})] \quad \text{Eq. 1.31}$$

Nel caso di stazionarietà del secondo ordine $E[z(\bar{x})] = \mu = \text{cost}$, sfruttando la proprietà di linearità del valore atteso, è possibile scrivere l'uguaglianza:

$$\sigma_z^2 = E[(z(\bar{x} + \bar{r}) - \mu)^2] = E[z^2(\bar{x} + \bar{r})] - \mu^2 \quad \text{Eq. 1.32}$$

Sostituendo quest'ultima nella precedente equazione, si ottiene:

$$\gamma(\bar{r}) = (\sigma_z^2 + \mu^2) - E[z(\bar{x} + \bar{r}) \cdot z(\bar{x})] \quad \text{Eq. 1.33}$$

Ricordando la definizione di covarianza:

$$C(\bar{r}) = E[z(\bar{x} + \bar{r}) \cdot z(\bar{x})] - \mu^2 \quad \text{Eq. 1.34}$$

Sviluppando il prodotto a secondo termine, ed utilizzando le proprietà di linearità del valore atteso E, si perviene alla seguente espressione:

$$\gamma(\bar{r}) = \sigma_z^2 - C(\bar{r}) \quad \text{Eq. 1.35}$$

in cui si nota come il variogramma contenga informazioni sulla correlazione del campo, anche nel caso in cui la varianza non esista, e σ_z^2 e $C(\bar{r})$ perdano di significato. Nel caso non stazionario, in cui il variogramma non sia asintotico ad un valore finito, il problema può essere ugualmente risolto richiamando l'ipotesi intrinseca:

$$\begin{aligned} E[z(\bar{x})] &= \mu \\ \gamma(\bar{r}) &= 1/2 E\left[\left(z(\bar{x} + \bar{r}) - z(\bar{x})\right)^2\right] \end{aligned} \quad \text{Eq. 1.36}$$

Si deve ora minimizzare la $E\left[\sum_i^n (\lambda_{i0} z_i - z_0)^2\right] = \min \quad \text{Eq. 1.30.}$

Sviluppando il quadrato come prodotto di due sommatorie si ottiene:



$$E[(\bar{z}_0 - z_0)^2] = E\left[\left(\sum_i \lambda_{0i}(z_i - z_0)\right) \cdot \left(\sum_j \lambda_{0j}(z_j - z_0)\right)\right] \quad \text{Eq. 1.37}$$

Aggiungendo e sottraendo z_0 nell'Eq. 1.36 si ottiene:

$$\gamma(\bar{r}_{ij}) = \frac{1}{2} E[(z_i - z_j)^2] = \frac{1}{2} E[((z_i - z_0) - (z_j - z_0))^2] \quad \text{Eq. 1.38}$$

Sviluppando questo quadrato, sostituendo nella Eq. 1.33 e applicando il vincolo espresso dall'equazione Eq. 1.29 si ricava:

$$E[(\bar{z}_0 - z_0)^2] = 2 \sum_i \lambda_{i0} \gamma(\bar{r}_{i0}) - \sum_i \sum_j \lambda_{i0} \lambda_{0j} \gamma(\bar{r}_{ij}) \quad \text{Eq. 1.39}$$

L'espressione ottenuta ha una forma molto simile a quella del caso omogeneo, con la differenza che qui si ha un caso di *minimizzazione vincolata*. Per determinare la soluzione si utilizza il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ovvero si costruisce una nuova funzione obiettivo in cui sia presente quella di partenza, imponendo il vincolo sui pesi. Il problema diventa, allora, ricercare la seguente condizione:

$$\min \left\{ \frac{1}{2} E[(\bar{z}_0 - z_0)^2] - \alpha (\sum \lambda_{i0} - 1) \right\} \quad \text{Eq. 1.40}$$

a cui imporre il vincolo: $\sum_i \lambda_{i0} = 1$.

Derivando l'equazione precedente, rispetto a λ_{i0} e α , si ottengono le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \lambda_{0k}} = \gamma(\bar{r}_{0k}) - \sum \lambda_{i0} \gamma(\bar{r}_{ik}) - \alpha = 0 & k = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \sum \lambda_i - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{Eq. 1.41}$$

La soluzione del problema diviene

$$\begin{cases} \gamma(\bar{r}_{k0}) = \sum \lambda_{0i} \gamma(\bar{r}_{ik}) + \alpha = 0 \\ \sum \lambda_i = 1 \end{cases} \quad \text{Eq. 1.42}$$

Scrivendo il sistema in forma compatta:

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_0 = \tilde{\Gamma} \bar{\lambda} + \alpha \\ \sum \lambda_i = 1 \end{cases} \quad \text{Eq. 1.43}$$

dove



$$\bar{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \alpha] \quad \bar{\gamma}_0 = [\gamma_{10}, \gamma_{20}, \dots, \gamma_{n0}, \alpha] \quad \tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma(r_{11}) & \dots & \gamma(r_{1n}) & 1 \\ \gamma(r_{21}) & \dots & \gamma(r_{2n}) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

si ottiene una rappresentazione della soluzione generale del problema di interpolazione spaziale di dati misurati in campi aleatori, valida quindi anche nel caso di campo omogeneo.

1.2.1.3 Aspetti particolari del kriging: i pesi

Utilizzando la notazione matriciale, il vettore dei pesi del kriging ordinario è calcolato mediante

$$\begin{bmatrix} [\lambda_i(r_0)]^T \\ v(r_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C(r_{ij})] & [1]^T \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [C(r_{0j})]^T \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 1.44}$$

I pesi del sistema tengono conto di:

- la vicinanza spaziale dei dati alla posizione in cui si vuole stimare il valore assunto dal campo, mediante il termine di covarianza $C(r_{0j})$
- la ridondanza di dati mediante i termini della matrice di covarianza $[C(r_{ij})]$.

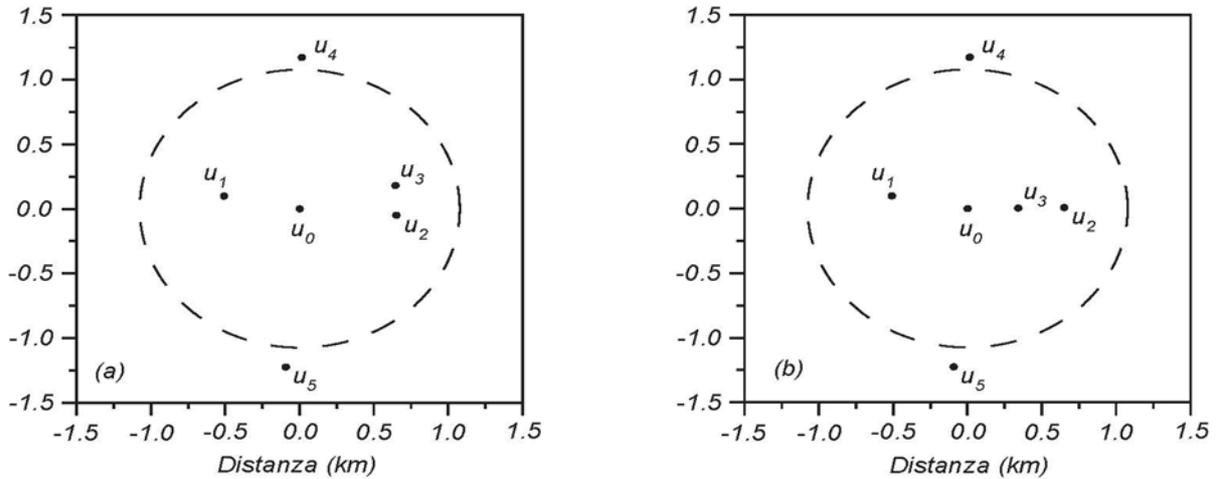


Figura 1 - Due configurazioni bidimensionali di dati con differente posizione della stazione u_3 . In entrambi i casi il valore attribuito alla posizione u_0 viene stimato mediante il kriging ordinario sulle cinque posizioni da u_1 a u_5 . Il cerchio tracciato con centro in u_0 ha raggio 1 km, corrispondente al raggio di correlazione dei dati.

Invece della distanza euclidea $|r_{0j}|$, comune a tutte le variabili, le distanze utilizzate nel kriging sono le distanze del semivariogramma $\gamma(r_{0j})$, ricavata dai dati e dalla specifica variabile allo studio. I pesi del kriging dipendono soltanto dalla forma (relativa all'anisotropia, al raggio di correlazione) del semivariogramma e non da ogni singolo fattore moltiplicativo del semivariogramma o delle covarianze. Si consideri, per



esempio, la stima mediante il kriging ordinario della variabile z nella posizione u_0 , utilizzando i dati rilevati nelle cinque posizioni come mostrato in *Figura 1 a*). Il sistema del kriging ordinario dell'equazione precedente diventa:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & 1 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & 1 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & 1 \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & 1 \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(u_0) \\ \lambda_2(u_0) \\ \lambda_3(u_0) \\ \lambda_4(u_0) \\ \lambda_5(u_0) \\ \nu(u_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{10} \\ C_{20} \\ C_{30} \\ C_{40} \\ C_{50} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 1.45}$$

dove i termini $C_{\alpha\beta}$ rappresentano le covarianze tra i dati misurati mentre i termini $C_{\alpha 0}$ determinano la covarianza dei dati misurati con quelli incogniti della posizione considerata. Supponendo di considerare un semivariogramma sfericamente isotropo e scala integrale di $1km$, il corrispondente modello di covarianza risulta:

$$C(h) = \begin{cases} 1 - [1.5 \frac{h}{a} - 0.5 (\frac{h}{a})^3] & \text{se } h < 1 \text{ km} \\ 0 & \text{se } h \geq 1 \text{ km} \end{cases}$$

Dato il modello di covarianza e la configurazione dei dati mostrata in *Figura 1 a*), il sistema del kriging diventa:

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.06 & 0.05 & 0.00 & 0.00 & 1 \\ 0.06 & 1.00 & 0.85 & 0.00 & 0.00 & 1 \\ 0.05 & 0.85 & 1.00 & 0.00 & 0.00 & 1 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 0.00 & 1 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 1.00 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(u_0) \\ \lambda_2(u_0) \\ \lambda_3(u_0) \\ \lambda_4(u_0) \\ \lambda_5(u_0) \\ \nu(u_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.43 \\ 0.43 \\ 0.42 \\ 0.00 \\ 0.00 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 1.46}$$

L'alto valore di covarianza corrispondente alla seconda riga e terza colonna della matrice (0.85) ci informa della ridondanza dei dati presso le stazioni 2 e 3. D'altra parte, i valori 0.00 in corrispondenza della quarta e quinta riga/colonna ci informano del fatto che il punto nel quale vogliamo stimare il dato si trova al di fuori del raggio di correlazione dei dati registrati nelle stazioni 4 e 5.

I seguenti pesi del kriging ordinario rappresentano la soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} \lambda_1(u_0) &= 0.446 & \lambda_2(u_0) &= 0.284 & \lambda_3(u_0) &= 0.190 \\ \lambda_4(u_0) &= 0.040 & \lambda_5(u_0) &= 0.040 \end{aligned}$$

Così come ci si attendeva i pesi del kriging decrescono mano a mano che la posizione incognita è più lontana dai punti nei quali il campo assume valori noti. Si noti:



- Entrambi i punti 1 e 2 si trovano alla medesima distanza dal punto 0 ma il peso della stazione 2 risulta minore rispetto al precedente per effetto della ridondanza di informazioni dovuta alla vicinanza della posizione 3.
- I dati noti nelle posizioni 4 e 5 hanno pesi non nulli nonostante siano al di fuori del raggio di correlazione dei dati. Questo peso non nullo è dovuto al loro contributo alla stima della componente di "trend" nella locazione 0 (la stima della componente di "trend" è implicita nel kriging ordinario).

Si consideri ora una seconda configurazione dei dati illustrata nel grafico della *Figura 1 b)*. I pesi del kriging ordinario in questa configurazione sono:

$$\begin{aligned}\lambda_1(u_0) &= 0.311 & \lambda_2(u_0) &= -0.057 & \lambda_3(u_0) &= 0.702 \\ \lambda_4(u_0) &= 0.022 & \lambda_5(u_0) &= 0.022\end{aligned}$$

Si noti come il peso della posizione 2 assuma un piccolo valore negativo. Pesi negativi tipicamente si presentano quando l'influenza di uno specifico dato è schermato da uno ad esso vicino. In particolare in *Figura 1 b)* il dato nella posizione 2 scherma le informazioni disponibili nella posizione 2. I pesi negativi fanno sì che il kriging possa stimare valori al di fuori del campo di validità della variabile allo studio. Sebbene questa non-convessità dello stimatore kriging sia una proprietà desiderabile, essa può fornire risultati non accettabili, come per esempio concentrazioni o valori di precipitazione negativi. Sono state proposte quattro vie per ovviare ai problemi di non-convessità:

- Forzare tutti i pesi del kriging ad assumere valori positivi [*Barnes and Johnson, 1984*].
- Aggiungere a tutti i pesi una costante eguale al modulo del maggior valore negativo nei pesi riscaldando poi tutti i pesi imponendone una somma unitaria [*Journel and Rao, 1996*].
- Forzare ogni valore al di fuori del campo di validità della variabile al più prossimo valore accettabile [*Mallet, 1980*].
- Imporre dei limiti sulle stime del kriging anziché sui suoi pesi attraverso l'uso di indicatori e di intervalli vincolanti [*Journel, 1986*].

Ulteriori dettagli possono essere ritrovati nella letteratura citata.

1.2.2 Il modello di infiltrazione

La corretta determinazione dei flussi idrici che, infiltrandosi nel terreno, aumentano il contenuto d'acqua del terreno e da questo sono drenati verso il canale oppure verso la falda sottostante necessita di una accurata modellazione dei processi che intervengono a determinare il moto dell'acqua all'interno di un mezzo poroso insaturo ed all'interfaccia fra aria e suolo. In particolare è necessario individuare la componente di scorrimento superficiale, determinata dalle proprietà del suolo e dall'intensità di precipitazione, come descritto nel seguito.

La precipitazione efficace rappresenta l'eccedenza della precipitazione rispetto alla capacità di infiltrazione del suolo.

Si possono distinguere due meccanismi di generazione di precipitazione efficace o separazione dei deflussi:

- Meccanismo di Dunne: la saturazione del suolo avviene per progressivo esaurimento del volume invasabile nello strato collaborante di terreno. A saturazione avvenuta la capacità di infiltrazione del suolo si annulla e la precipitazione successiva è interamente efficace.



- Meccanismo di Horton: la saturazione avviene superficialmente, se e quando l'intensità della precipitazione eccede la capacità di infiltrazione del terreno.

Tali meccanismi sono entrambi rilevanti al fine del computo dei flussi di infiltrazione, e vanno quindi entrambi incorporati all'interno della formulazione modellistica che verrà sviluppata.

1.2.2.1 Caratteristiche e proprietà dei suoli: l'acqua nel terreno

L'acqua che si infiltra nel terreno è soggetta a processi di redistribuzione nella porzione di suolo saturo e non saturo, la cui descrizione matematica è necessaria alla valutazione della capacità di infiltrazione.

I processi di redistribuzione (Figura 2) comprendono:

- evapotraspirazione dagli strati superficiali del terreno e dalle piante;
- risalita capillare;
- ricarica della falda;
- deflusso sub-superficiale;
- deflusso profondo.

Le modalità con le quali avvengono i flussi sub-superficiali sono a loro volta funzione del grado di saturazione del terreno, la cui specificazione richiede la definizione di alcune proprietà dei suoli.

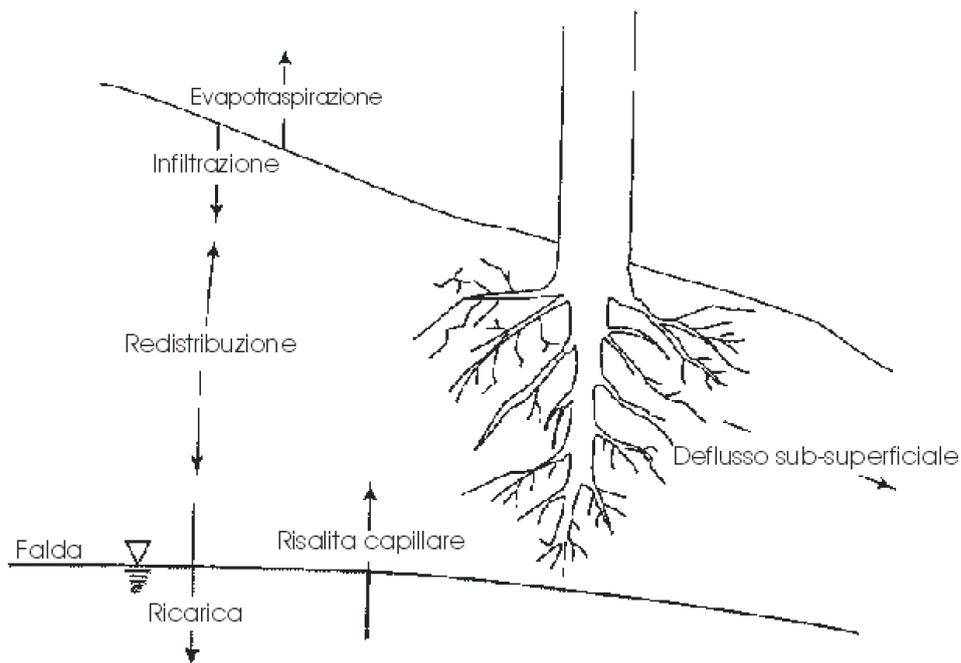


Figura 2 - Moti dell'acqua nel terreno.

Proprietà indici dei terreni

Si consideri un suolo omogeneo come un sistema trifase costituito da materiale solido, acqua e aria. Un campione di mezzo poroso di volume V , appartenente a tale suolo, è composto di una parte solida V_s e di una parte V_v di vuoti, i quali possono essere occupati da acqua o gas. Si definisce porosità il rapporto



$$\phi = \frac{V_v}{V} \quad \text{Eq. 1.47}$$

per i terreni naturali generalmente $\phi = 0.3 \div 0.6$. Indicato con V_w il volume d'acqua presente nel terreno, si definisce contenuto d'acqua del terreno θ :

$$\theta = \frac{V_w}{V} \quad 0 \leq \theta \leq \phi \quad \text{Eq. 1.48}$$

Proprietà idrauliche dei terreni

Il moto nei mezzi porosi saturi è descritto dalla legge di Darcy

$$v_x = -K_h \frac{d(z + \frac{p}{\gamma_w})}{dx} \quad \text{Eq. 1.49}$$

dove v_x è la velocità in direzione x , z l'altezza rispetto ad un sistema di riferimento arbitrariamente scelto, p la pressione dell'acqua, γ_w la densità dell'acqua e K_h la conduttività idraulica del mezzo. Poichè γ_w è costante per problemi idrologici che non coinvolgano gradienti di temperatura o salinità conviene usare la piezometrica ψ definita come

$$\psi = \frac{p}{\gamma_w} \quad \text{Eq. 1.50}$$

nell'applicare la legge di Darcy allo studio dell'infiltrazione. Nei moti di filtrazione in mezzi porosi insaturi conduttività idraulica e piezometrica sono funzioni del contenuto d'acqua, θ ; la legge di Darcy perciò diventa:

$$v_x = -K_h(\theta) \frac{d[z + \psi(\theta)]}{dx} \quad \text{Eq. 1.51}$$

Dalla *Eq. 1.51* si può dedurre che la conduttività idraulica, o permeabilità, è la velocità alla quale l'acqua si muove in un mezzo poroso sotto l'azione di un gradiente unitario di energia potenziale. Essa dipende dalle dimensioni dei canalicoli disponibili per il passaggio dell'acqua: in condizioni di saturazione per $\theta = \phi$, K_h raggiunge il valore massimo di K_{hsat} che dipende dalle dimensioni dei grani che costituiscono il terreno; in condizioni di parziale saturazione dipende dalle dimensioni dei grani e dal grado di saturazione $S = \theta/\phi$. Per un dato suolo la relazione tra conduttività idraulica e contenuto d'acqua è generalmente non lineare così come quella tra piezometrica e contenuto d'acqua. L'andamento qualitativo di tali relazioni è riportato in *Figura 3*.

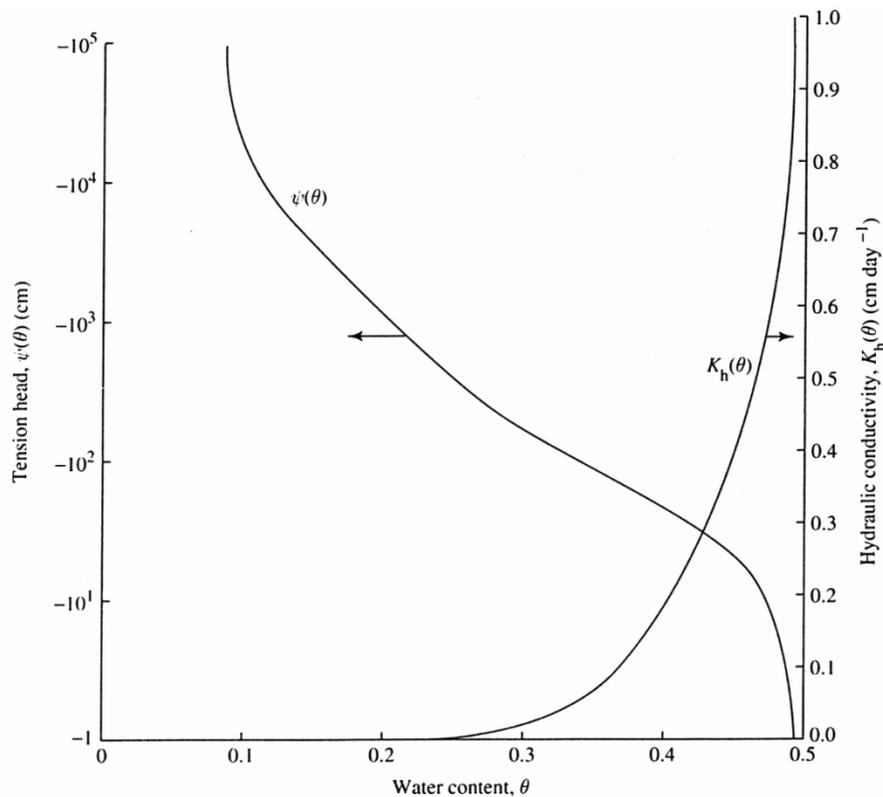


Figura 3 - Forme caratteristiche delle relazioni idrauliche $\psi(\theta)$ e $K_h(\theta)$ per terreni insaturi. Per questo terreno $\phi = 0.5$.

Nel presente lavoro si sono utilizzate le relazioni approssimate determinate da Clapp e Hornberger (1978):

$$\psi(\theta) = |\psi_s| \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^{-b} \quad \text{Eq. 1.52}$$

$$K_h(\theta) = K_{h,sat} \left(\frac{\theta}{\phi}\right)^c \quad \text{Eq. 1.53}$$

Nelle Eq. 1.52 e Eq. 1.53 ψ_s , b e $c \cong 2b+3$ sono parametri sperimentali dipendenti dalla tessitura del terreno, che è determinata dalla percentuale in peso di argilla, limo e sabbia presenti nel suolo dopo che le particelle aventi diametro superiore a quelle di sabbia (0.2 mm) siano state rimosse, secondo lo schema elaborato dallo U.S. Department of Agriculture (Figura 4).

I valori dei parametri che definiscono i legami costitutivi secondo Clapp e Hornberger sono riportati in Tabella 1 per le diverse tipologie di terreno. Il contenuto d'acqua che può essere trattenuto dal terreno contro la forza di gravità è rappresentato dalla capacità di campo θ_{FC} .

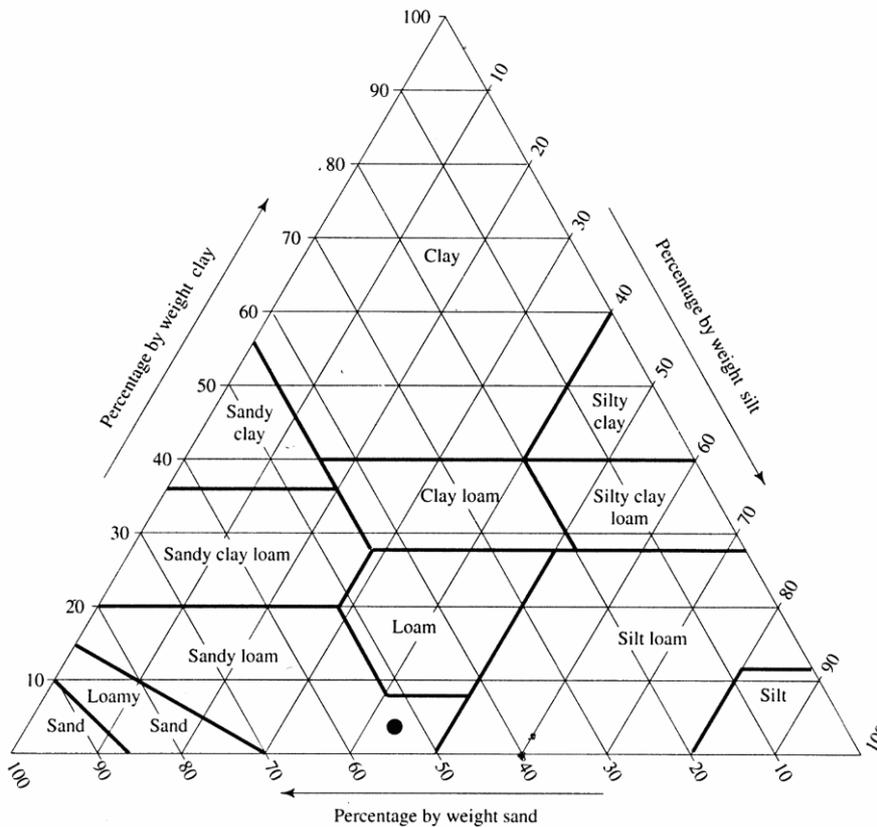


Figura 4 - Triangolo di tessitura del terreno.

Tabella 1 - Valori dei parametri che definiscono i legami costitutivi dei terreni secondo lo schema di *Figura 4* (da Clapp e Hornberger, 1978).

Classe di tessitura	ϕ	K_{hsat} (mm/h)	ψ_f (mm)	θ_{FC}
Sand	0.437	> 40	49.5	0.07 ÷ 0.17
Loamy sand	0.437	29.9	61.3	0.11 ÷ 0.19
Sandy loam	0.453	10.9	110.1	0.18 ÷ 0.28
Silt loam	0.501	6.5	166.8	0.22 ÷ 0.36
Loam	0.463	3.4	88.9	0.20 ÷ 0.30
Sandy clay loam	0.398	1.5	218.5	0.22 ÷ 0.32
Silty clay loam	0.471	1.0	273.0	0.30 ÷ 0.37
Clay loam	0.464	1.0	208.8	0.30 ÷ 0.37
Sandy clay	0.430	0.6	239.0	0.27 ÷ 0.34
Silty clay	0.479	0.5	292.2	0.30 ÷ 0.42
Clay	0.475	0.3	316.3	0.32 ÷ 0.40

1.2.2.2 L'Infiltrazione

Si consideri un evento di pioggia che cominci al tempo $t = 0$ e finisca al tempo $t = t_w$; la velocità di infiltrazione, $f(t)$, è la velocità alla quale l'acqua penetra nel suolo attraverso la superficie.



Si definisce inoltre l'intensità di precipitazione $w(t)$, la capacità di infiltrazione $f_c(t)$ come la massima velocità a cui l'infiltrazione può avvenire e si indica il battente idraulico dell'acqua sopra la superficie del terreno con la notazione $Y(t)$.

Per modellare il processo di infiltrazione è necessario distinguere 3 diverse condizioni:

- **Battente idraulico nullo** : In questo caso la velocità di infiltrazione è uguale all'intensità di precipitazione ed è minore o al più uguale alla capacità di infiltrazione:

$$Y(t) = 0, \quad f(t) = w(t) \leq f_c(t) \quad \text{Eq. 1.54}$$

- **Saturazione superficiale**: quando l'intensità di precipitazione è maggiore della capacità di infiltrazione si forma un battente idraulico:

$$Y(t) > 0, \quad f(t) = f_c(t) \leq w(t) \quad \text{Eq. 1.55}$$

- **Saturazione sub-superficiale**: Si forma un battente idraulico poiché l'intero terreno è saturo e non può più avere luogo alcuna infiltrazione. In questo caso la velocità di infiltrazione è nulla:

$$Y(t) \geq 0, \quad f(t) = 0 \quad \text{Eq. 1.56}$$

Caratteristiche fondamentali del processo di infiltrazione

Studi sperimentali del processo di infiltrazione durante il quale avvenga saturazione superficiale dimostrano che la velocità di infiltrazione assume valori elevati all'inizio dell'evento, seguiti da una rapida diminuzione, per poi tendere asintoticamente ad un valore costante. La *Figura 5* mostra i profili verticali del contenuto d'acqua in funzione del tempo, indicando come all'inizio di un evento meteorico vi sia un fronte (di saturazione, se l'intensità dell'evento lo permette) che si propaga attraverso la colonna di suolo in direzione verticale (verso il basso).

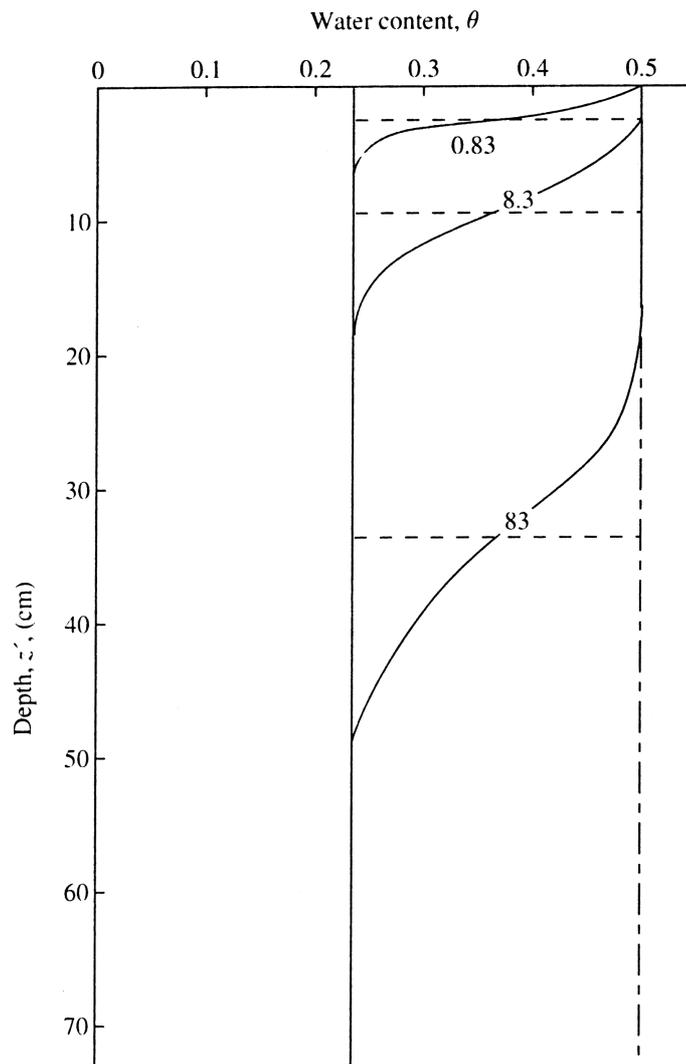


Figura 5 - Profili del contenuto d'acqua in un terreno argilloso con $\phi = 0, 50$ per un'infiltrazione costante a battente idraulico nullo.

Si tratta ora di determinare la velocità di infiltrazione in funzione del tempo t , $f(t)$, durante un evento di pioggia. Infatti $f(t)$ dipende da

- Intensità di precipitazione $w(t)$;
- Conduttività idraulica satura alla superficie;
- Contenuto d'acqua iniziale del terreno θ_0 ;
- Pendenza e scabrezza della superficie del terreno;
- Caratteristiche chimiche di tale superficie;
- Proprietà chimiche e fisiche dell'acqua.

Il modello del processo di infiltrazione che verrà descritto nel paragrafo successivo permetterà di esaminare gli effetti dei primi tre punti di cui sopra. Tuttavia prima di passare alla fase successiva si rende necessario un'analisi quantitativa del modo in cui tali fattori sono influenzati dalle condizioni ambientali.

- **Intensità di precipitazione:** le Eq. 1.54, Eq. 1.55, Eq. 1.56 definiscono le condizioni in cui $w(t)$ e $Y(t)$ determinano un intervallo di possibili valori per $f(t)$.



- **Conduttività idraulica alla superficie:** si può dimostrare che il minimo valore della capacità di infiltrazione di un terreno è circa uguale a K_{hsat} .
- **Copertura del suolo:** la conduttività idraulica, a parità di caratteristiche del terreno può variare in modo significativo in funzione dell'uso del suolo.

1.2.2.3 Il modello di Green-Ampt

Il modello di Green-Ampt applica la legge di Darcy e il principio di conservazione della massa in una formulazione uni-dimensionale alle differenze finite che permette una visione realistica del processo di infiltrazione combinando i due meccanismi di separazione dei deflussi:

- **Meccanismo di Dunne:** la saturazione avviene per progressivo esaurimento del volume invasabile localmente nello strato collaborante del terreno (spessore inferiore al metro). A saturazione avvenuta non è possibile più alcuna infiltrazione e la precipitazione successiva defluisce interamente sulla superficie.
- **Meccanismo di Horton:** la saturazione avviene superficialmente, quando l'intensità di precipitazione eccede la capacità di infiltrazione del terreno.

Si consideri pertanto un parallelepipedo rettangolare di terreno orientato in modo tale che una dimensione sia parallela all'asse verticale z (Figura 6). Le dimensioni Δx , Δy , Δz devono essere abbastanza grandi da comprendere un volume rappresentativo di terreno.

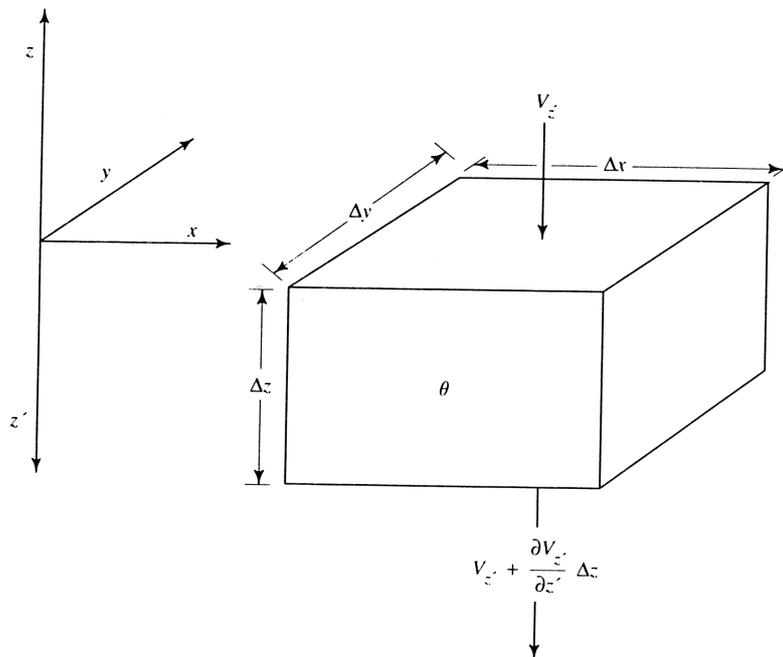


Figura 6 - Schematizzazione del terreno usata nel derivare le equazioni di Green-Ampt.

Se il moto avviene solo in direzione verticale (z'), l'equazione di conservazione della massa è data da:

$$\rho_w v_{z'} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta t - \rho_w \left(v_{z'} + \frac{\partial v_{z'}}{\partial z'} \Delta z \right) \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta t = \rho_w \frac{\partial \theta}{\partial t} \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta t \quad \text{Eq. 1.57}$$

dove ρ_w è la densità dell'acqua, $v_{z'}$ la velocità in direzione z' e θ il contenuto d'acqua. Assumendo una densità costante l'equazione di continuità diventa



$$-\frac{\partial v_{z'}}{z'} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \text{Eq. 1.58}$$

L'equazione di Darcy, Eq. 1.51, poiché $z/z' = -1$, diventa

$$v_{z'} = K_h(\theta) - K_h(\theta) \frac{d\psi(\theta)}{dz'} \quad \text{Eq. 1.59}$$

Si consideri ora un volume di terreno che sia omogeneo fino ad una profondità indefinita. Questo significa che la porosità ϕ e la conduttività idraulica saturata K_{hsat} , sono costanti in tutto il volume. Il contenuto d'acqua θ al tempo $t = 0$ sia anch'esso costante e uguale a $\theta_0 < \phi$.

Al tempo $t = 0$ il flusso d'acqua in direzione verticale è dato dalla Eq. 1.59 come

$$v_{z'}(z, 0) = K_h(\theta_0) \quad \text{Eq. 1.60}$$

A partire dal tempo $t = 0$, l'acqua comincia ad arrivare alla superficie ad una velocità w fino ad un tempo t_w . A questo punto si rende necessario distinguere due casi:

- 0) $w < K_{hsat}$: Si consideri un sottile strato superficiale di terreno dove l'Eq. 1.60 si applica all'istante in cui l'evento di pioggia comincia. Assumendo $w > K_h(\theta_0)$ l'acqua entrerà in questo strato più velocemente di quanto ne esca e si accumulerà aumentando il contenuto d'acqua θ del terreno stesso. L'aumento di θ provoca un aumento della conduttività idraulica così da far aumentare anche il flusso in uscita dallo strato di terreno. Tuttavia finché il contenuto d'acqua nel terreno è minore del contenuto d'acqua θ_w per cui $w = K_{hsat}$, esso continuerà ad aumentare. Per $\theta = \theta_w$ la conduttività idraulica è $K_h(\theta_w) = w$, il flusso in uscita è uguale al flusso in entrata e il contenuto d'acqua assume un valore costante fino alla fine dell'evento. Tale processo, schematizzato in Figura 7, ha luogo successivamente in ognuno degli strati componenti il terreno generando una serie di profili di contenuto d'acqua e un grafico di infiltrazione in funzione del tempo riportati in Figura 8.

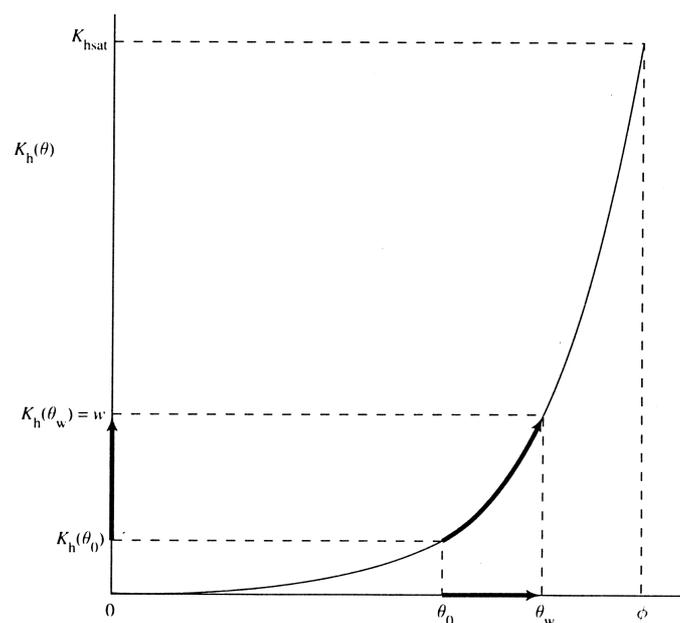


Figura 7 - Andamento della conduttività idraulica in funzione di θ per $K_h(\theta_0) < w = K_h(\theta_w) < K_{hsat}$.



- 1) $w > K_{hsat}$: In questo caso il processo appena descritto avviene solamente nelle prime fasi dell'infiltrazione poiché il contenuto d'acqua e la conduttività idraulica non possono eccedere il valore alla saturazione, rispettivamente ϕ e K_{hsat} . Non appena la superficie raggiunge lo stato di saturazione, la parte di precipitazione che non si infiltra si accumula su di essa formando un battente idraulico che, in presenza di una qualche pendenza, dà luogo a deflusso superficiale.

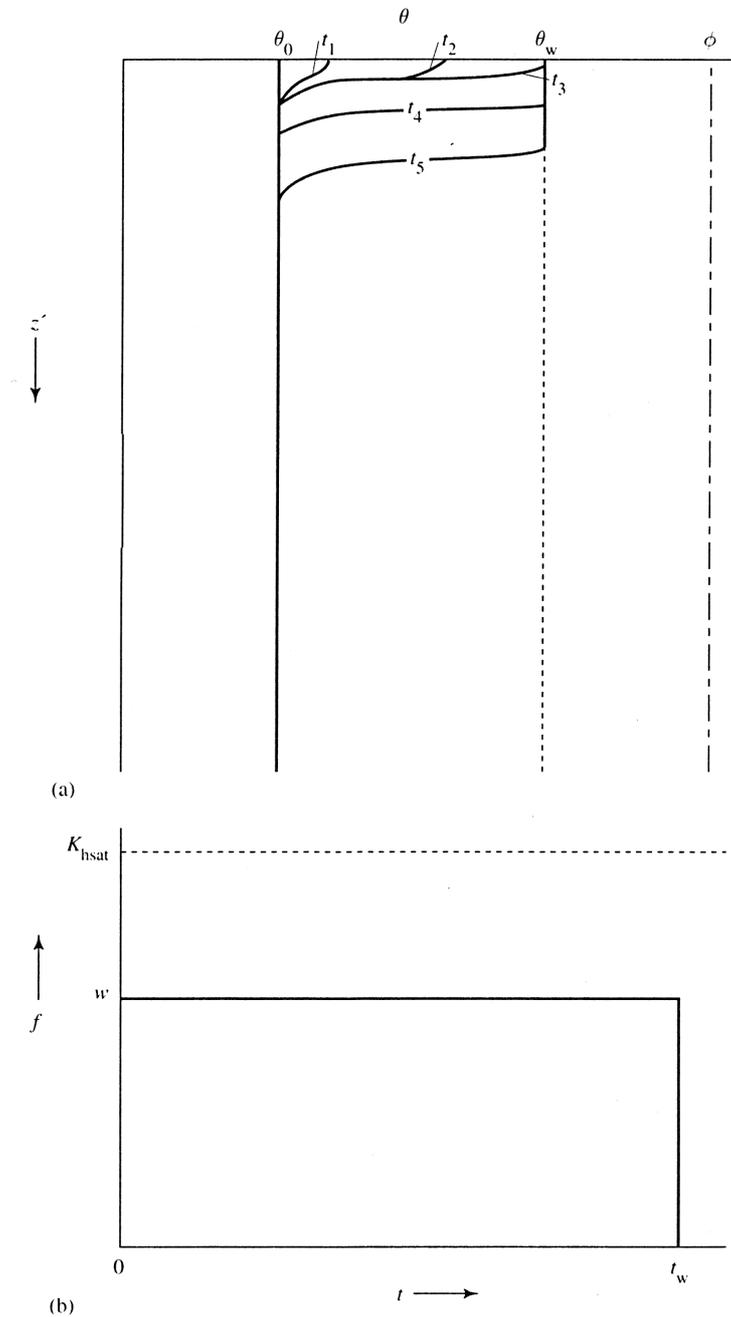


Figura 8 - a) Profili del contenuto d'acqua ad istanti successivi e b) velocità di infiltrazione in funzione del tempo per $w < K_{hsat}$.

In questa situazione l'andamento del profilo di θ è rappresentato in *Figura 9*. L'istante in cui lo strato superficiale del terreno diventa saturo è chiamato time of ponding ed è indicato con t_p . Per calcolare il valore di t_p si assume che il fronte bagnato



abbia forma perfettamente orizzontale e si indica con $z_f(t_p)$ la profondità di tale fronte per $t = t_p$. Per $t < t_p$ tutta la pioggia caduta si è infiltrata.

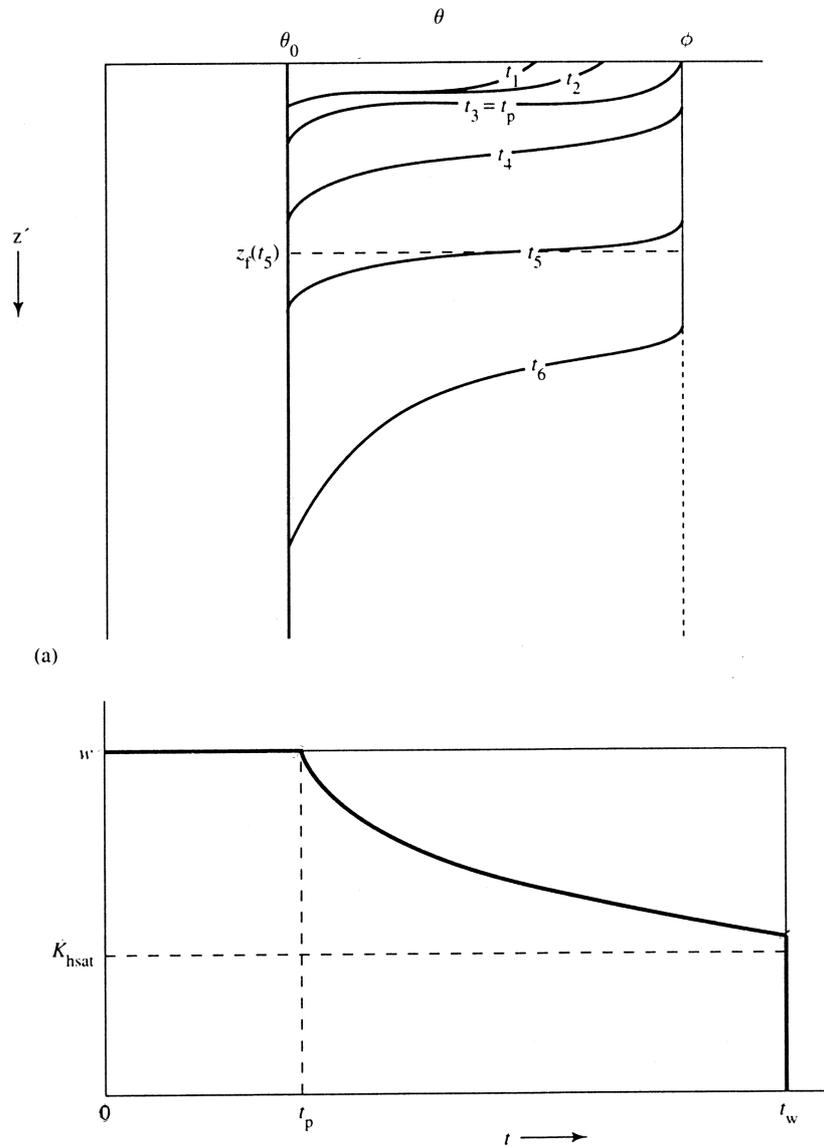


Figura 9 - a) Profili del contenuto d'acqua ad istanti successivi e b) velocità di infiltrazione in funzione del tempo per $w > K_{hsat}$.

Indicando con $F(t_p)$ la quantità d'acqua infiltrata risulterà:

$$F(t_p) = w \cdot t_p \quad \text{Eq. 1.61}$$

Quest'acqua occupa una porzione di terreno compresa tra la superficie e la quota $z_f(t_p)$ come si può vedere in *Figura 9*. Per l'equazione di continuità

$$F(t_p) = z_f(t_p) \cdot (\phi - \theta_0) \quad \text{Eq. 1.62}$$

Combinando la *Eq. 1.61* con la *Eq. 1.62* si ottiene una prima espressione per il time of ponding:



$$t_p = \frac{z_f(t_p) \cdot (\phi - \theta_0)}{w} \quad \text{Eq. 1.63}$$

Al fine di poter utilizzare la Eq. 1.63 si rende necessario determinare $z_f(t_p)$ applicando la legge di Darcy (Eq. 1.51) alle differenze finite tra la superficie e la profondità $z_f(t_p)$:

$$v_{z'}(0, t_p) = f(t_p) = w = K_{hsat} - K_{hsat} \frac{\psi_f - 0}{z_f(t_p)} \quad \text{Eq. 1.64}$$

dove ψ_f è la tensione effettiva in corrispondenza del fronte bagnato. Il valore 0 nella Eq. 1.64 corrisponde alla tensione effettiva alla superficie per $t = t_p$, istante in cui, avendosi saturazione, la conduttività idraulica è uguale a K_{hsat} . Tenendo presente che $\psi_f < 0$ è possibile risolvere la Eq. 1.64 per $z_f(t_p)$:

$$z_f(t_p) = \frac{K_{hsat} |\psi_f|}{w - K_{hsat}} \quad \text{Eq. 1.65}$$

Sostituendo la Eq. 1.65 nella Eq. 1.63 si trova l'equazione finale per il time of ponding:

$$t_p = \frac{K_{hsat} |\psi_f| (\phi - \theta_0)}{w(w - K_{hsat})} \quad \text{Eq. 1.66}$$

Se l'evento continua per $t > t_p$ l'infiltrazione continua ma ad una velocità inferiore come si può notare in Figura 9. Applicando ulteriormente l'approccio alle differenze finite è possibile modellare anche questa fase dell'infiltrazione. Indicando con $z_f(t)$ la profondità del fronte bagnato al tempo t , con $t_p < t < t_w$, la Eq. 1.65 diventa

$$f(t) = K_{hsat} \left[1 + \frac{|\psi_f| + y(t)}{z_f(t)} \right] \quad \text{Eq. 1.67}$$

dove con $y(t)$ si è indicato il battente idraulico sopra la superficie del terreno. Ora, poiché in generale $y(t)$ è una funzione complicata che dipende dall'entità dell'infiltrazione al tempo t e dalla pendenza e copertura della superficie e poiché sono stati ottenuti risultati soddisfacenti considerando $y(t)$ trascurabile, nella successiva analisi si porrà $y(t) = 0$. Risolvendo l'equazione di continuità

$$F(t) = z_f(t)(\phi - \theta_0) \quad \text{Eq. 1.68}$$

per $z_f(t)$ e sostituendo nella Eq. 1.67 si ottiene

$$f(t) = K_{hsat} \left[1 + \frac{|\psi_f| (\phi - \theta_0)}{F(t)} \right] \quad t_p \leq t_w \quad \text{Eq. 1.69}$$

Questa equazione permette di determinare la velocità di infiltrazione in funzione dell'infiltrazione totale e va risolta per tentativi tenendo presente che

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} \quad \text{Eq. 1.70}$$



1.2.2.4 Stima delle proprietà idrauliche dei terreni

La conduttività idraulica K_{hsat} e la tensione effettiva ψ_f giocano un ruolo importante nel modello di Green-Ampt e molti studi sono stati fatti per determinare valori appropriati di tali parametri. Si può ritenere che la conduttività idraulica satura effettiva da usare nel modello dovrebbe essere più bassa rispetto ai valori nominali a causa del flusso di aria verso l'alto che avviene durante il processo di infiltrazione e che occupa parte dei vuoti rendendoli indisponibili al passaggio dell'acqua. Alcuni studi (*Freyberg e altri, 1980*) suggeriscono un valore pari a $1/2 K_{hsat}$; tuttavia *Mein e Larson (1973)* e altri studi hanno ottenuto buoni risultati utilizzando i valori nominali. Il presente lavoro seguirà la seconda strada nella convinzione che questa scelta non influisca sull'ordine di grandezza del processo fisico. Per quanto riguarda ψ_f si è invece utilizzato un approccio semplificato che sembra essere giustificato per molti scopi idrologici (*Brakensiek (1977), Freyberg e altri (1980)*) secondo cui

$$|\psi_f| = 0,76 |\psi_s| \quad \text{Eq. 1.71}$$

Approccio di Green-Ampt per piccoli spessori di suolo

Nella sezione precedente si è trattato il caso di un suolo omogeneo di profondità indefinita. L'approccio può però essere esteso per trattare l'infiltrazione in terreni in cui ad una certa profondità sia interposto uno strato impermeabile che può essere costituito da roccia o, con il medesimo effetto, dalla superficie di una falda. Si consideri un terreno permeabile orizzontale avente proprietà idrauliche costanti tra la superficie ad uno strato orizzontale impermeabile posto a profondità ΔZ ; tale strato verrà d'ora in avanti denominato strato collaborante.

Il valore iniziale del contenuto d'acqua sia θ_0 e l'intensità di precipitazione sia $w(t)$. Il volume d'acqua presente all'interno del terreno all'inizio dell'evento di pioggia per $t = 0$, dà luogo ad un valore del contenuto d'acqua pari a θ_0 uniforme all'interno del terreno (*Figura 10*).

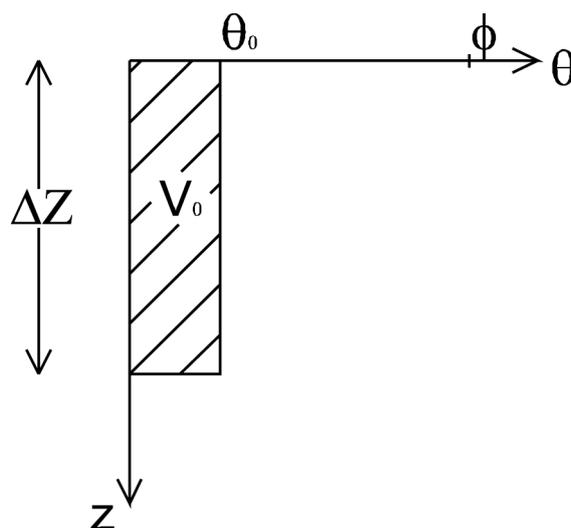


Figura 10 - Contenuto d'acqua in funzione della profondità per $t = 0$.

Indicando con $z_f(t)$ la profondità equivalente del fronte bagnato al variare del tempo, come nel paragrafo precedente, l'equazione *Eq. 1.72* fornisce l'espressione per $z_f(t)$ in funzione di $F(t)$, ϕ e θ_0 .



$$z_f(t) = \frac{F(t)}{\phi - \theta_0} \quad \text{Eq. 1.72}$$

Durante l'evento di precipitazione possono presentarsi due casi:

- $z_f(t) < \Delta Z$: il fronte bagnato avanza verso lo strato impermeabile come riportato in *Figura 11* e il terreno non ha ancora raggiunto lo stato di saturazione. La trattazione è analoga a quella vista per terreni profondi. Si distinguono due casi:
 - $w(t) < K_{hsat}$: In questo caso tutta la precipitazione si infiltra e $f(t) = w(t)$;
 - $w > K_{hsat}$: In questo caso si rende necessario confrontare l'intensità di precipitazione $w(t)$ con la capacità di infiltrazione del terreno $f(t)$ riportata nell'equazione *Eq. 1.69*:
 - ♦ $w(t) < f(t)$: tutta la pioggia si infiltra e quindi $f(t) = w(t)$;
 - ♦ $w(t) > f(t)$: la frazione $f(t)$ di pioggia si infiltra mentre la rimanente parte $w - f(t)$ va a costituire deflusso superficiale. In questo caso la velocità di infiltrazione $f(t)$ viene calcolata mediante l'equazione *Eq. 1.69* risolta per tentativi in funzione del volume d'acqua per unità di superficie infiltrato al tempo t , $F(t)$

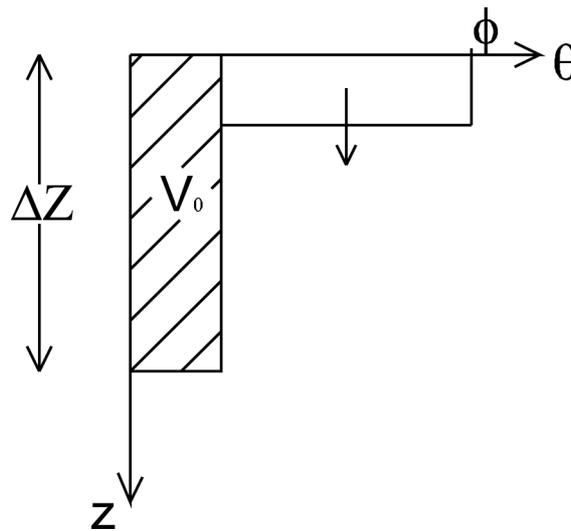


Figura 11 - Contenuto d'acqua in funzione della profondità per $t \neq 0$.

Si noti come questa trattazione risulti semplificata rispetto a quella descritta nel paragrafo precedente in quanto nel caso in cui l'intensità di precipitazione sia maggiore della conduttività idraulica satura essa non considera il time of ponding. Si assume, a favore della sicurezza, che il tempo richiesto per saturare lo strato superficiale del terreno t_p sia trascurabile, sovrastimando dunque la porzione di precipitazione che defluisce superficialmente di una quantità pari a $w \cdot t_p$.

- $z_f(t) \geq \Delta Z$: In questo caso lo strato collaborante del terreno è già saturo e quindi tutta la precipitazione che cade è efficace in termini di deflusso superficiale.

Il volume di acqua che si infiltra nel suolo in parte concorre a formare il deflusso sub-superficiale ed in parte contribuisce a ricaricare la falda. Il modello implementato considera il vuotamento gravitativo dello strato collaborante ipotizzando non nulla la sola componente verticale di velocità dell'acqua nel mezzo insaturo. Tale ipotesi, alla



luce di recenti studi (*Anderson et al., 1997; Torres et al., 1998*) appare lecita sia in terreni tipicamente pianeggianti sia in zone montuose, se si considera quale strato collaborante di terreno la sola zona insatura presente al di sopra dello strato roccioso profondo.

Su terreni ad elevata permeabilità è inoltre possibile considerare uniforme il contenuto d'acqua del suolo all'interno dello strato più superficiale di terreno (*Dingman, 1999*); la velocità di filtrazione risulterà pertanto governata dalla legge di Darcy con gradiente unitario:

$$v = K_h(\theta) \quad \text{Eq. 1.73}$$

La percolazione dell'acqua verso gli strati più profondi di terreno è stata pertanto così valutata stimando la permeabilità del terreno in condizioni non sature secondo la relazione proposta da Clapp e Hornberger (*Clapp e Hornberger, 1978*):

$$K_h(\theta) = K_{hsat} \left(\frac{\theta}{\phi} \right)^c \quad \text{Eq. 1.74}$$

dove $c \cong 2b + 3$ ed il parametro b è funzione delle caratteristiche granulometriche del suolo.

La frazione d'acqua immagazzinata nel terreno che defluisce ipodermicamente è rappresentata dal parametro sintetico η . Tale frazione, che viene restituita al corso d'acqua con tempi caratteristici dell'ordine dei giorni, verrà nel seguito indicata con h_{PR} (mm/h) e calcolata nel modo seguente:

$z_f(t) < \Delta Z$:

▪ $w(t) < K_{hsat}$:

- $\theta(t) \leq \theta_{FC}$: $h_{PR} = 0$;

- $\theta(t) > \theta_{FC}$: $h_{PR} = \eta \cdot w(t)$.

▪ $w(t) \geq K_{hsat}$:

$w(t) < f(t)$:

$\theta(t) \leq \theta_{FC}$: $h_{PR} = 0$;

$\theta(t) > \theta_{FC}$: $h_{PR} = \eta \cdot w(t)$.

$w(t) \geq f(t)$:

$\theta(t) \leq \theta_{FC}$: $h_{PR} = 0$;

$\theta(t) > \theta_{FC}$: $h_{PR} = \eta \cdot f(t)$.

$z_f(t) \geq \Delta Z$:

$h_{PR} = 0$.

Il modello di Green-Ampt così come descritto in questa sezione, è stato implementato numericamente per valutare la separazione dei deflussi in un generico dominio monodimensionale. I parametri da stimare richiesti in ingresso da tale codice sono la conduttività idraulica satura K_{hsat} , lo spessore dello strato collaborante ΔZ e il contenuto d'acqua iniziale θ_0 .

1.2.3 L'evapotraspirazione: il modello FAO

La necessità infatti di analizzare fenomeni di infiltrazione e di ricarica della falda a scale temporali superiori a quelle caratteristiche del singolo evento meteorico (tipicamente dell'ordine delle ore o, al più, del giorno) richiede l'abbinamento dei classici metodi di analisi dell'infiltrazione con un accurato bilancio energetico al fine di stimare



il non trascurabile flusso di massa dovuto all'evapotraspirazione. A tal proposito l'evapotraspirazione, che costituisce il flusso dominante nell'arco di tempo compreso tra due successivi eventi meteorici, determina le condizioni iniziali di umidità del terreno all'inizio del successivo evento, influenzando pertanto la capacità di infiltrazione del suolo e la velocità con la quale i volumi infiltrati percolano fino a raggiungere il livello di falda sottostante.

L'evaporazione è il processo attraverso il quale l'acqua superficiale viene evaporata e quindi trasferita all'atmosfera. Se l'evaporazione avviene da una superficie d'acqua o direttamente dal suolo il processo è propriamente detto evaporazione. Se invece l'evaporazione avviene attraverso gli 'stoma', minuscole aperture sulla superficie delle foglie, il processo è chiamato traspirazione. Tre importanti condizioni sono necessarie affinché l'evapo-traspirazione (il processo combinato di evaporazione e traspirazione) possa avvenire:

- vi deve essere disponibilità d'acqua alla superficie;
- vi deve essere disponibilità di energia sufficiente a permettere il cambiamento di fase liquido-aeriforme.
- vi deve essere un meccanismo di trasporto che garantisca l'allontanamento dell'evaporato dalla zona considerata. In mancanza di questo si raggiunge progressivamente una condizione di saturazione dell'atmosfera che impedisce una ulteriore evaporazione.

1.2.3.1 Fattori meteorologici che influenzano la evapotraspirazione

I fattori meteorologici che determinano l'evapotraspirazione sono i flussi radiativi che forniscono l'energia per la vaporizzazione ed i meccanismi di trasporto atmosferico che rimuovono il vapore acqueo dalla superficie di evaporazione.

Radiazione solare

I processi di evapotraspirazione sono determinati dalla quantità di energia disponibile al cambiamento di fase; la radiazione solare rappresenta la principale fonte energetica capace di convertire grandi quantità di acqua dallo stato liquido in vapore.

Tale energia, determinata dalla posizione geografica e dal periodo dell'anno (*Figura 12*), è inoltre dipendente dalla torbidità dell'atmosfera e dalla presenza di nubi che riflettono e assorbono la maggior parte della radiazione.

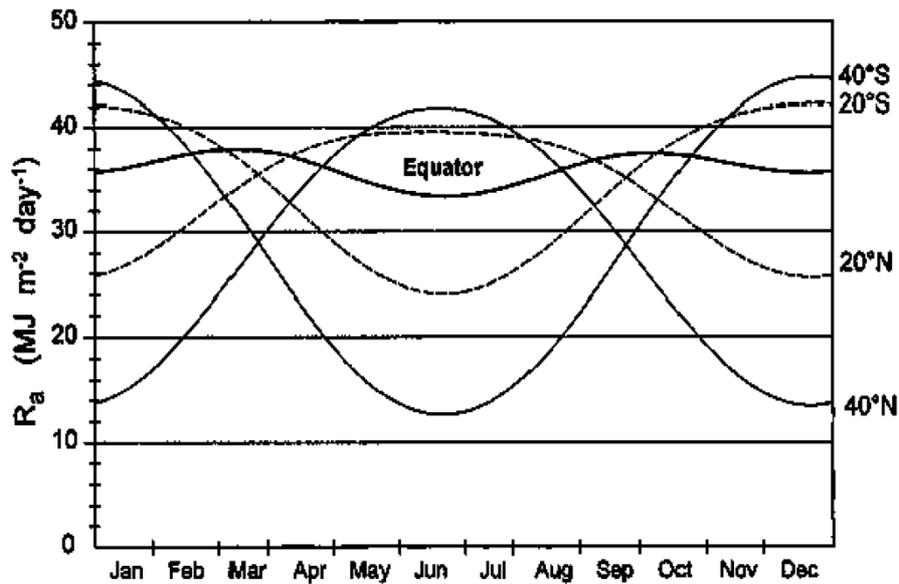


Figura 12 - Variazione annuale della radiazione extraterrestre all'equatore, 20 e 40 Nord e Sud.

Temperatura

La radiazione solare assorbita dall'atmosfera e il calore emesso dalla terra incrementano la temperatura dell'aria. Il calore sensibile dell'aria trasferisce energia alla superficie ed esercita un controllo sulla evapotraspirazione.

Umidità

La differenza tra la pressione del vapore acqueo sulla superficie in cui ha luogo l'evaporazione e l'aria sovrastante è il fattore determinante per la rimozione del vapore. Campi ben irrigati in regioni calde e aride, ad esempio, consumano una grande quantità di acqua a causa di una elevata richiesta atmosferica di evaporazione. Nelle umide regioni tropicali, nonostante l'elevato apporto energetico, l'elevata umidità dell'aria riduce notevolmente l'evapotraspirazione.

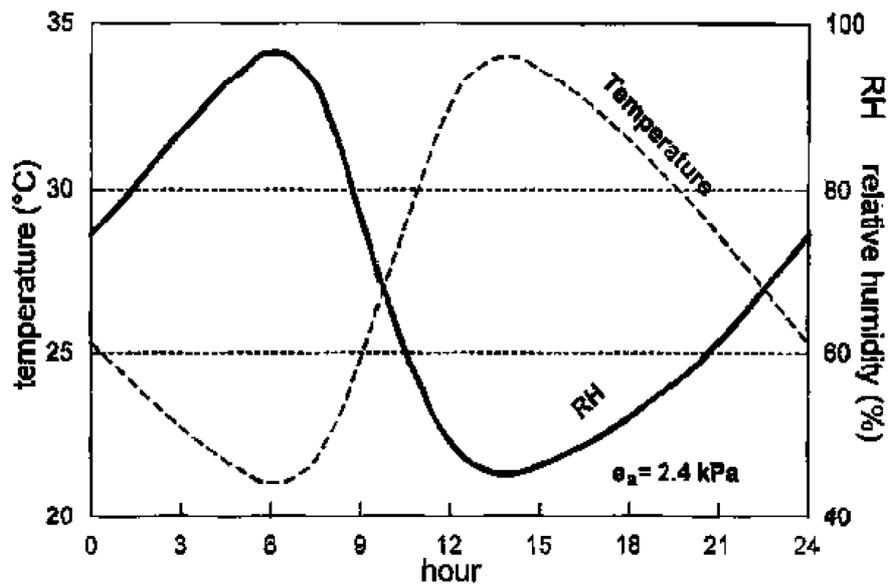


Figura 13 - Variazione dell'umidità relativa e della temperatura nelle 24 ore per un costante valore di pressione di vapore di 2.4 kPa.

Velocità del vento

I processi di rimozione del vapore dipendono dal vento e dalle fluttuazioni di velocità turbolente nello strato superficiale d'atmosfera. Se l'aria nello strato prossimo alla superficie non viene continuamente ricambiata, questa tende a raggiungere condizioni di saturazione con una conseguente diminuzione dell'evapotraspirazione (Figura 14).

1.2.3.2 Evapotraspirazione per la coltura di riferimento

La coltura di riferimento è definita dalla FAO come: *un'ipotetica coltura con un'altezza di 0.12 m, una resistenza fissata $r_{sv} = 70 \text{ sm}^{-1}$ ed un albedo pari a 0.23*, il cui comportamento è influenzato dai soli parametri climatici. L'evapotraspirazione riferita a tale coltura è indicata con ET_0 .

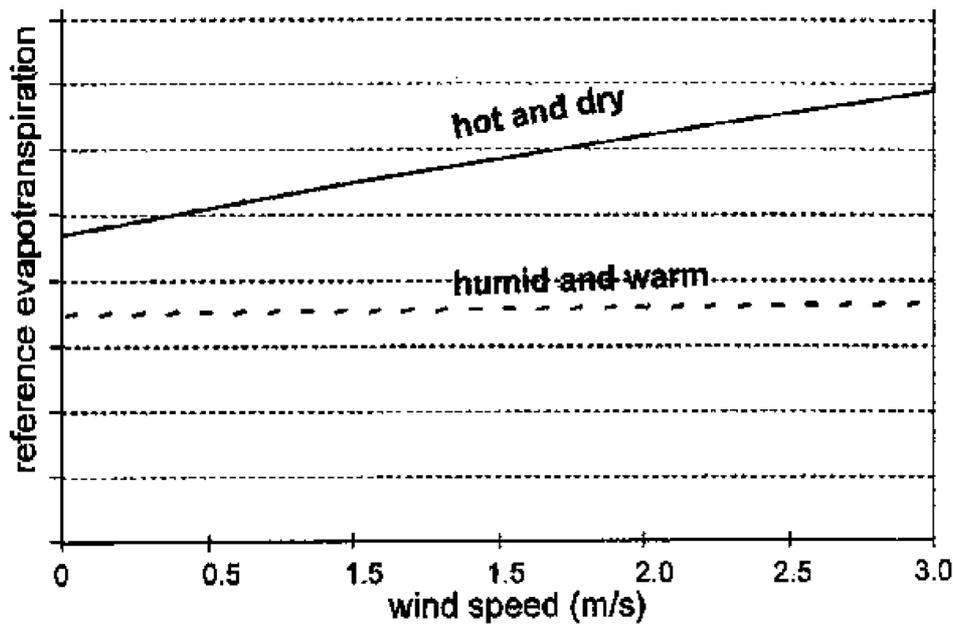


Figura 14 - Effetto della velocità del vento sulla evapotraspirazione in condizioni caldo-secco e freddo-umido.

Equazione di Penman-Monteith

Nel 1948 Penman combinò il bilancio di energia con il metodo di trasferimento di massa ottenendo una equazione per calcolare l'evaporazione da una superficie d'acqua in condizioni standardizzate di illuminazione, temperatura, umidità e velocità del vento. Successivi sviluppi hanno permesso di determinare formulazioni per estendere il calcolo a superfici coltivate.

La combinazione più nota è l'equazione di Penman-Monteith:

$$\lambda ET = \frac{\Delta(R_n - G) + \frac{\rho c_p}{r_a} [e^* - e_a]}{\gamma(1 + \frac{r_{sv}}{r_a}) + \Delta} \quad \text{Eq. 1.75}$$

dove R_n è la radiazione netta, G il flusso di calore verso il terreno, $(e_s - e_a)$ rappresenta il deficit di pressione di vapore nell'aria rispetto alla saturazione, ρ è la densità media dell'aria a pressione costante, c_p è il calore specifico dell'aria, Δ rappresenta la pendenza della curva della pressione di vapore in funzione della temperatura, γ è la costante psicometrica e r_s e r_a sono rispettivamente la resistenza della superficie ed aerodinamica.

Resistenza atmosferica e superficiale Il trasferimento di calore dalla superficie di evaporazione all'atmosfera è determinata dalla resistenza aerodinamica:

$$r_a = \frac{\ln \left[\frac{z_v - d}{z_{om}} \right] \ln \left[\frac{z_h - d}{z_{oh}} \right]}{k^2 \bar{v}(z_v)} \quad \text{Eq. 1.76}$$

dove z_v , è l'altezza alla quale viene misurata la velocità del vento, z_{om} è la lunghezza d'attrito per il trasporto di quantità di moto, z_h è l'altezza alla quale è misurata l'umidità, z_{oh} la lunghezza d'attrito per il trasporto di vapore e $v(z_v)$ è la velocità del vento misurata.

La resistenza dovuta al suolo e alla traspirazione può essere espressa come:



$$r_s = \frac{r_l}{LAI_a} \quad \text{Eq. 1.77}$$

dove LAI_a è il Leaf Area Index attivo, indice dell'area delle foglie che effettivamente contribuisce allo scambio superficiale di calore e di vapore, generalmente calcolato rispetto alla porzione superiore della superficie vegetale illuminata dal sole. Tale parametro, definito dal rapporto tra l'area delle foglie (con riferimento al solo lato superiore) per unità di area del suolo sottostante (LAI), dipende dal tipo di coltura e dallo stadio di maturazione raggiungendo il valore massimo in prossimità del periodo di fioritura. Un'espressione generale per LAI_a è:

$$LAI_a = 0.5 LAI \quad \text{Eq. 1.78}$$

che assume che solo la metà superiore della coltura contribuisca attivamente allo scambio di calore e vapore (Figura 15).

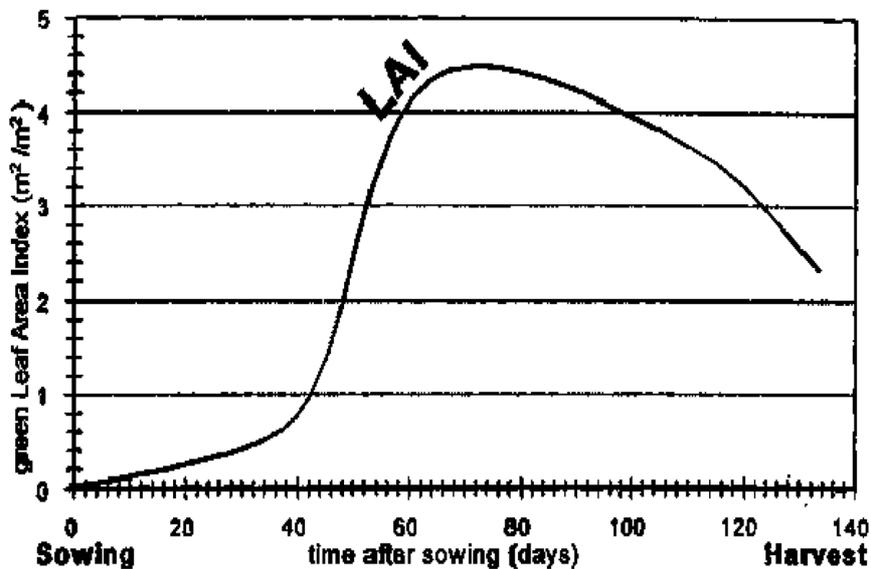


Figura 15 - Variazione tipica del LAI attivo durante il periodo di crescita del mais.

Radiazione La radiazione netta incidente è data dalla somma tra la radiazione solare netta e la radiazione termica atmosferica incidente cui si sottrae la radiazione termica emessa dalla superficie:

$$R_n = (1 - \alpha)R_s + R_l - R_{nl} \quad \text{Eq. 1.79}$$

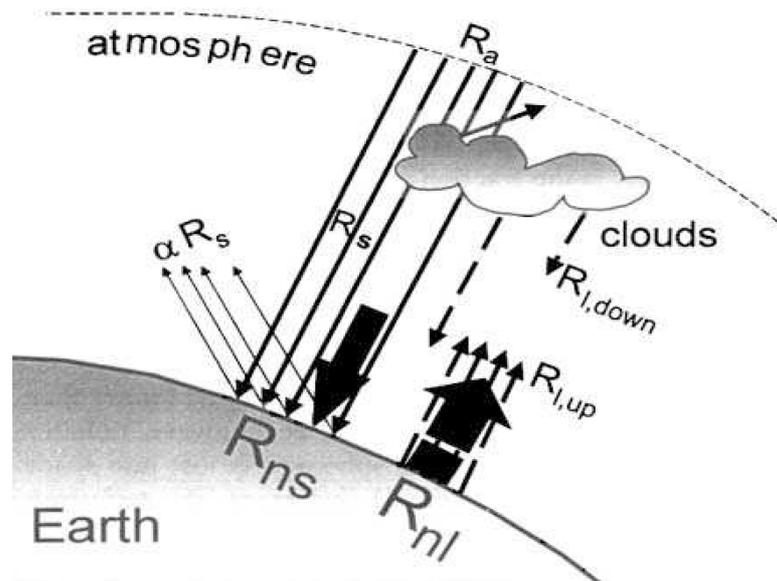


Figura 16 - Diverse componenti della radiazione.

Il modello FAO

Dall'originale equazione di Penman-Monteith e dalle equazioni della resistenza aerodinamica e colturale è stata ricavata l'equazione FAO Penman-Monteith, che si può scrivere come:

$$\lambda ET_0 = \frac{\Delta(R_n - G) + \frac{\epsilon\lambda}{208R_d} \frac{\gamma u_2}{T} [e^* - e_a]}{\gamma(1 + 0.34 u_2) + \Delta} \quad \text{Eq. 1.80}$$

Ed il cui calcolo richiede particolari accortezze, in dipendenza dei dati climatici ed idrologici disponibili.

Procedura di calcolo dei diversi termini dell'equazione di Penmann

Pressione atmosferica

$$P = 101300 \left(\frac{293 - 0.0065 z}{293} \right)^{5.26} \quad \text{Eq. 1.81}$$

fornisce valori in Pascal in funzione della quota z rispetto al livello del mare.

Calore latente di vaporizzazione

Esprime l'energia richiesta per trasformare una unità di massa d'acqua dallo stato liquido in vapore a temperatura e pressione costante: $\lambda = 2.45 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$

Costante psicosometrica

La costante psicosometrica è data da:

$$\gamma = \frac{c_p P}{\epsilon \lambda} \quad \text{Eq. 1.82}$$

dove $c_p = 1.013 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{K}^{-1}$ e $\epsilon = 0.622$.

Pressione parziale di vapore alla saturazione



$$e^0(T) = 0.6108 \exp\left[\frac{17.27T}{T + 237.3}\right] \quad \text{Eq. 1.83}$$

dove $e^0(T)$ rappresenta la pressione di vapore dell'aria alla temperatura T [kPa].

La pressione di vapore media giornaliera può essere calcolata come media tra i valori assunti in corrispondenza alla temperatura minima e massima.

$$e^* = \frac{e^*(T_{max}) + e^*(T_{min})}{2} \quad \text{Eq. 1.84}$$

Pendenza della curva della pressione di vapore alla saturazione

$$\Delta = \frac{4098[0.6108 \exp(\frac{17.27T}{T+237.3})]}{(T + 237.3)^2} \quad \text{Eq. 1.85}$$

dove Δ è la pendenza della curva della pressione di vapore alla saturazione alla temperatura T [kPaC⁻¹], T temperatura dell'aria [C].

Pressione parziale di vapore

Se non sono disponibili misure di e_a , questa può essere stimata sulla base delle misure di umidità relativa minima e massima:

$$e_a = \frac{e^*(T_{max})RH_{min}/100 + e^*(T_{min})RH_{max}/100}{2} \quad \text{Eq. 1.86}$$

Radiazione extraterrestre

$$R_a = \frac{24(60)}{\pi} G_{sc} d_r [\omega_s \sin(\varphi) \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cos(\delta) \sin(\omega_s)] \quad \text{Eq. 1.87}$$

dove R_a radiazione extraterrestre rappresenta la quantità di energia che giunge su di una ipotetica superficie esterna all'atmosfera [MJm⁻²day⁻¹], G_{sc} costante solare = 0.0820 MJm⁻²min⁻¹, d_r inverso della distanza relativa sole-terra, φ latitudine [rad].

$$d_r = 1 + 0.033 \cos\left(\frac{2\pi J}{365}\right) \quad \text{Eq. 1.88}$$

$$\omega_s = \cos^{-1}[-tg(\phi)tg(\delta)] \quad \text{Eq. 1.89}$$

$$\delta = 0.409 \sin\left(\frac{2\pi}{365}D - 1.39\right) \quad \text{Eq. 1.90}$$

Radiazione netta solare



$$R_{n.s} = (1 - \alpha) \cdot R_s \quad \text{Eq. 1.91}$$

dove R_s è la radiazione solare misurata [$MJm^{-2}day^{-1}$] e α l'albedo.

Radiazione netta di onda lunga

$$R_{nl} = \left[\frac{T_{max}^4 + T_{min}^4}{2} \right] (0.34 - 0.14\sqrt{e_a}) \left(1.35 \frac{R_s}{R_{s0}} - 0.35 \right) \quad \text{Eq. 1.92}$$

dove $\sigma = 5.5576 \cdot 10^{-8} W m^{-2} \text{ } ^\circ K^{-4}$ e:

$$R_{s0} = (0.75 + 2 \cdot 10^{-5} z) R_a \quad \text{Eq. 1.93}$$

Radiazione netta totale

$$R_n = R_{n.s} - R_{nl} \quad \text{Eq. 1.94}$$

Flusso di calore terrestre

Esistono modelli complessi per descrivere il flusso di calore terrestre. Dato che questo flusso è particolarmente piccolo se confrontato con la radiazione netta, soprattutto quando la superficie è coperta dalla vegetazione, si può ragionevolmente assumere per passi temporali giornalieri $G = 0$.

1.2.3.3 Evapotraspirazione per le diverse colture

Gli effetti della variazione delle condizioni climatiche sull'evapotraspirazione sono messi in conto nel calcolo di ET_0 , che però si riferisce di default ad una coltura di riferimento, corrispondente ad un manto erboso nella fase di crescita. Gli effetti delle effettive caratteristiche che distinguono le colture sono invece integrati nel coefficiente colturale, k_c , un coefficiente adimensionale in grado di dirci se l'effettiva coltura presente sia in grado di evapotraspirare di più ($k_c > 1$) o di meno ($k_c < 1$) rispetto alla coltura di riferimento

L'evapotraspirazione è quindi generalmente calcolata come

$$ET_c = k_c \cdot ET_0 \quad \text{Eq. 1.95}$$

La FAO propone due differenti approcci a seconda del numero di coefficienti colturali utilizzati nel calcolo di k_c e quindi di ET. Il presente utilizza il metodo a due coefficienti colturali al fine di considerare i due differenti contributi di evaporazione e di traspirazione. Si ha quindi:

$$k_c = k_{cb} + k_e \quad \text{Eq. 1.96}$$

dove k_{cb} è un coefficiente riferito alla coltura mentre k_e è un coefficiente di evaporazione dal suolo.

Si noti come la somma dei due non possa mai eccedere un valore massimo determinato dall'energia disponibile e come il calcolo del coefficiente k_e richieda un bilancio giornaliero di volume per la determinazione del contenuto d'acqua nello strato collaborante del terreno. Si ottiene quindi:



$$ET_c = (k_{cb} + k_e)ET_0 \quad \text{Eq. 1.97}$$

Componente di traspirazione

Il coefficiente colturale integra gli effetti delle caratteristiche che distinguono una coltura da quella di riferimento. A causa delle differenze di albedo, altezza della pianta, resistenza aerodinamica, proprietà degli stomata e delle foglie, la traspirazione da una coltura che ricopre interamente il suolo differisce da quella di riferimento. Anche le diverse caratteristiche vegetative delle piante durante il ciclo di vita influenzano la risposta evaporativa delle stesse, così che nei diversi periodi dell'anno l'influenza colturale risulta differente.

Mediante degli abachi è possibile ricavare i valori del coefficiente k_{cb} durante le varie fasi di crescita e la durata delle stesse mediante le quali si giunge alla costruzione della curva del K_{cb} come esemplificato in *Figura 17*. Da questa, in relazione al giorno corrente si determina facilmente il coefficiente ad esso corrispondente.

I valori di k_{cbmid} e k_{cbend} , nel caso in cui l'umidità relativa minima giornaliera differisca da 45% o la velocità del vento sia diversa da 2 m/s, devono essere corretti mediante la:

$$k_{cb} = k_{cb(tab)} + [0.04(u_2 - 2) - 0.004(RH_{min} - 45)]\left(\frac{h}{3}\right)^{0.3} \quad \text{Eq. 1.98}$$

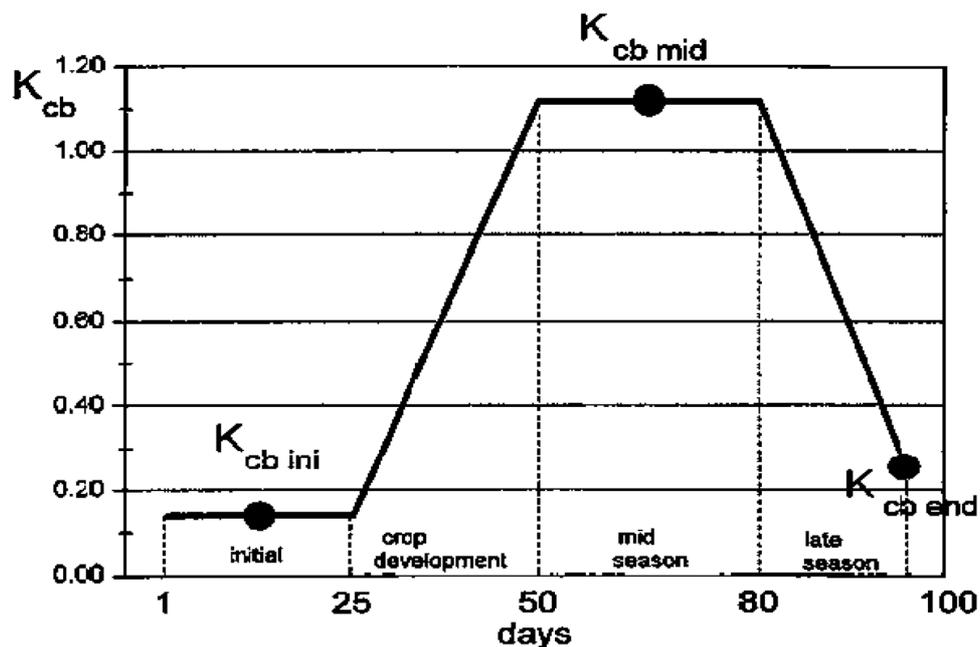


Figura 17 - Costruzione della curva del coefficiente k_{cb} per la soia utilizzando lunghezze delle fasi di crescita di 25, 25, 30 e 20 giorni.

Componente di evaporazione

Dove la superficie è secca k_e tende a zero e non rimane acqua sulla superficie disponibile per la evaporazione. Quando la parte superficiale del terreno è bagnata, in seguito ad una pioggia o ad irrigazione, k_e è massimo, non potendo tuttavia superare il valore massimo determinato dall'energia disponibile. Quando la parte superficiale si secca meno acqua è disponibile per l'evaporazione e questa si riduce in proporzione alla quantità d'acqua residua nello strato collaborante.



$$k_e = k_r(k_{cmax} - k_{cb}) \leq (f_{ew}k_{cmax}) \quad \text{Eq. 1.99}$$

dove k_e è il coefficiente di evaporazione del suolo, k_{cb} il coefficiente colturale, k_{cmax} il massimo valore di k_c in seguito ad una pioggia o ad irrigazione, k_r il coefficiente adimensionale di riduzione dell'evaporazione dipendente dalla profondità nel suolo dell'acqua che evapora e f_{ew} la frazione di suolo che è esposta e bagnata. Il coefficiente k_{cmax} risulta essere funzione di variabili climatiche e del coefficiente colturale k_{cb} secondo l'equazione che segue:

$$k_{cmax} = \max(\{1.2 + [0.04(u_2 - 2) - 0.004(RH_{min} - 45)](\frac{h}{3})^{0.3}\}, \{k_{cb} + 0.05\}) \quad \text{Eq. 1.100}$$

dove h rappresenta la massima altezza della pianta durante il periodo considerato. Quando la quantità d'acqua nello strato superficiale di terreno diviene limitante, k_r decresce fino a zero quando il suolo è stato svuotato.

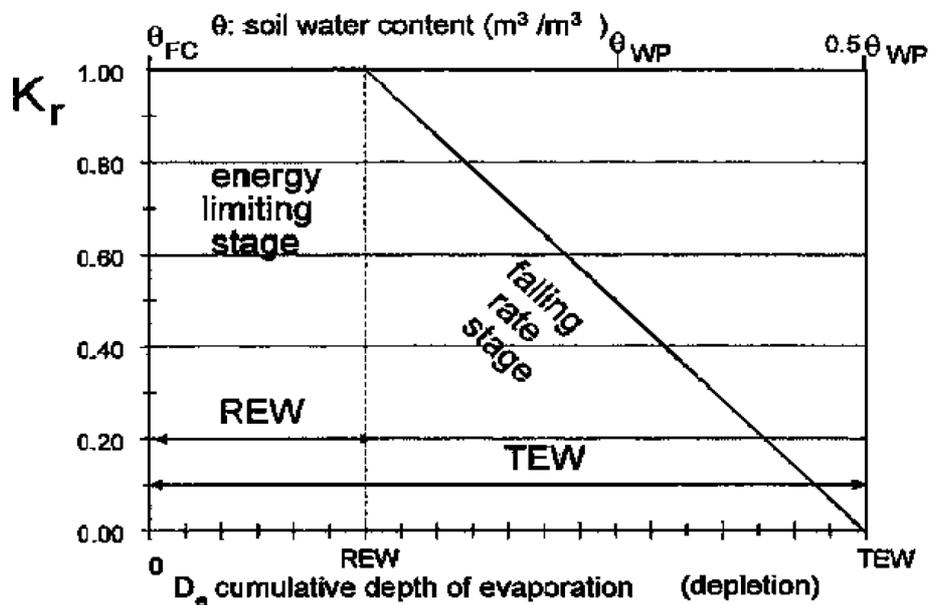


Figura 18 - Diagramma per la determinazione del coefficiente k_r .

La quantità d'acqua che può essere allontanata per evaporazione può essere stimata mediante:

$$TEW = 1000(\theta_{FC} - 0.5\theta_{WP})Z_e \quad \text{Eq. 1.101}$$

dove θ_{FC} contenuto d'acqua oltre il quale questa non può più essere allontanata per gravità, θ_{WP} contenuto d'acqua al punto di appassimento delle piante, Z_e profondità dello strato di suolo che è soggetta ai processi evaporativi. Infine la frazione di suolo esposta all'evaporazione è data da:

$$f_{ew} = 1 - f_c \quad \text{Eq. 1.102}$$

dove f_c è la porzione di territorio coperta dalla vegetazione.

1.2.3.4 Traspirazione in condizioni di stress idrico

Le forze che agiscono sul suolo decrescono il suo potenziale di energia e diminuiscono la capacità di estrazione dell'acqua da parte delle piante. Quando il suolo è bagnato l'acqua ha un alto potenziale di energia (potenziale debolmente negativo), è



relativamente libera di muoversi ed è facilmente catturabile dalle radici delle piante. In suoli secchi l'acqua ha un basso potenziale di energia (potenziale fortemente negativo) ed è fortemente vincolata alla matrice solida essendo quindi meno facilmente estraibile. Quando l'energia potenziale dell'acqua nel suolo scende al di sotto di un determinato valore la coltura entra in condizioni di stress idrico. Gli effetti possono essere descritti moltiplicando il coefficiente k_{cb} per un coefficiente di stress k_s . TAW La disponibilità d'acqua del suolo si riferisce alla capacità di quest'ultimo di trattenere l'acqua e renderla disponibile per le piante. La capacità di campo indica la quantità di acqua che il suolo trattiene contro le forze di gravità. In assenza di un ulteriore apporto, dopo il superamento di tale limite, l'acqua rimanente nello strato collaborante viene ridotta per effetto della suzione imputabile alle piante. Mano a mano che questa diminuzione procede l'acqua viene legata alle particelle di terreno sempre più fortemente rendendosi disponibile alla vegetazione in minor quantità e con un maggior dispendio energetico. L'estrazione si arresta quando la vegetazione raggiunge il punto di appassimento. Nella fase precedente al raggiungimento del punto di appassimento le piante riducono progressivamente la loro attività fotosintetica chiudendo gli stoma e adottando in sostanza un meccanismo di auto-sopravvivenza mediante la conservazione delle risorse idriche disponibili.

Gli effetti della scarsità d'acqua per la coltura vengono quindi descritti mediante una riduzione del valore del coefficiente colturale considerando una costante moltiplicativa di stress k_s che può essere determinata come mostrato in *Figura 19*, secondo l'equazione che segue:

$$\theta_T = \theta_{FC} - (\theta_{FC} - 0.5\theta_{WP}) \frac{RAW}{TEW} \quad \text{Eq. 1.103}$$

dove RAW rappresenta la profondità massima alla quale l'acqua può essere estratta dal sottosuolo senza subire restrizioni eccetto che per l'energia disponibile.

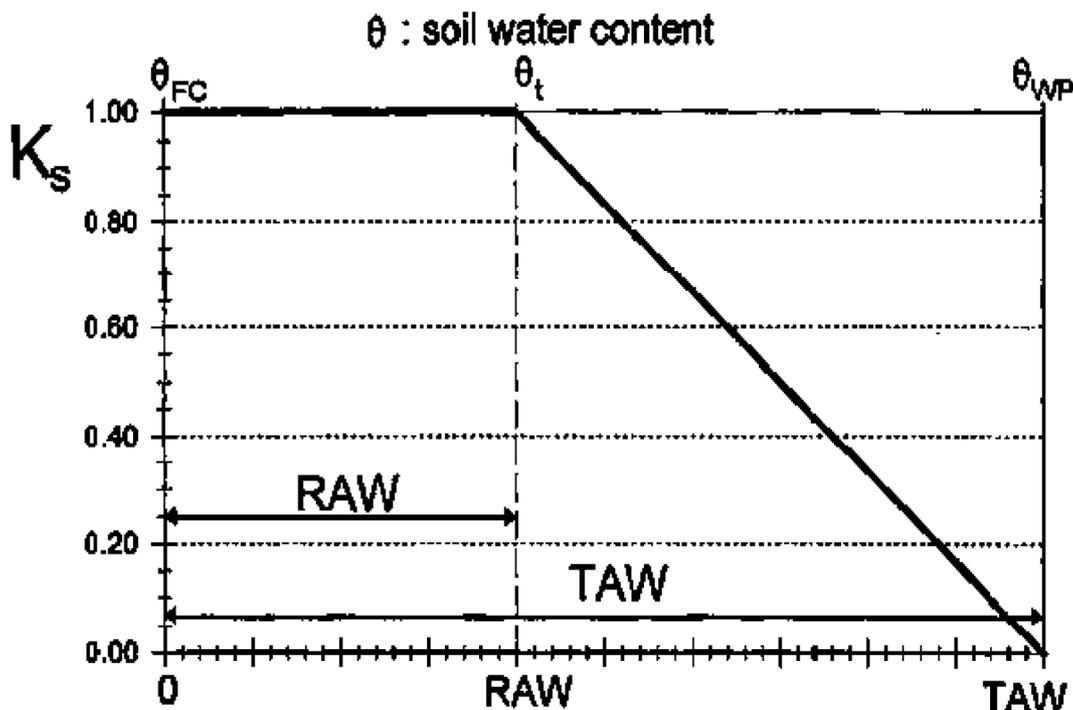


Figura 19 - Diagramma per la determinazione del coefficiente k_s .